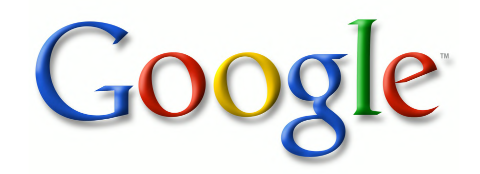
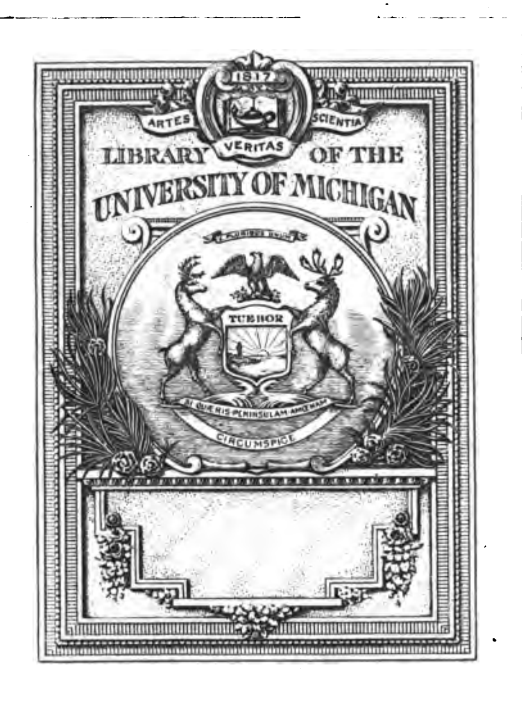

Google


1817
ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE

CORRESPONDANCE

MATHÉMATIQUE

ET PHYSIQUE.

CORRESPONDANCE
MATHÉMATIQUE ET PHYSIQUE,

PUBLIÉE

PAR A. QUETELET,

DIRECTEUR DE L'OBSERVATOIRE DE BRUXELLES, PROFESSEUR AU MUSÉE; MEMBRE DE L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES ET BELLES-LETTRES, ET DE L'INSTITUT DES PAYS-BAS; DE LA SOCIÉTÉ PHILOMATIQUE DE PARIS, DE LA SOCIÉTÉ ASTRONOMIQUE DE LONDRES, DES SOCIÉTÉS DE GAND, LIÉGE, ROTTERDAM, LA HAYE, CAMBRAI, WURZBOURG, ETC.

TOME V.



BRUXELLES,

M. HAYEZ, IMPRIMEUR DE L'ACADÉMIE ROYALE,

RUE DE LA MONTAGNE, N° 10.

1829.

CORRESPONDANCE

MATHÉMATIQUE ET PHYSIQUE.

Des surfaces réfléchissantes ou dirimantes qui ont deux foyers conjugués; c'est-à-dire, qui jouissent de la propriéte de réfléchir ou de réfracter les rayons émanés d'un point, dans des directions qui passent par un second point; par A. QUETELET.

On connaît différentes surfaces qui jouissent de la propriété de réfléchir ou de réfracter des rayons émanés d'un point, dans des directions qui passent par un second point; mais je ne sache pas qu'on ait compris toutes les surfaces qui jouissent exclusivement de cette propriété sous un énoncé simple et général. *Malus* avait abordé ce problème par une savante analise (1), mais la généralité même de ses formules et la complication des calculs ne permettent pas de suivre la solution dans tous ses détails. Le cas particulier remarqué par M. *De La Rive* (2), avait même échappé, malgré sa simplicité, à l'attention de cet habile physicien.

On verra peut-être avec quelqu'intérêt que, sans avoir pour ainsi dire recours à l'analise, on peut caractériser toutes les surfaces dont il s'agit, par une propriété si simple qu'on embrasse presque d'un même coup d'œil la question dans tous ses détails. De plus, cette propriété caractéristique n'a pas besoin d'être démontrée pour les personnes qui voudront bien se rappeler les théorèmes sur les caustiques, que j'ai donnés dans les volumes précédens de la *Correspondance Mathématique*; car

(1) 14e cahier, tome VII du *Journal de l'École Polytechnique*.
(2) *Dissertation sur les caustiques*, Genève, 1823, in-4o.

elle en dérive directement comme corollaire. Je donnerai l'énoncé pour les surfaces dirimantes seulement, puisque ces surfaces comprennent les surfaces réfléchissantes comme cas particuliers, en faisant le rapport de la réfraction égale à -1.

Les surfaces dirimantes qui ont deux foyers conjugués, tels que les rayons émanés d'un des foyers sont réfractés dans des directions qui passent par le second, sont caractérisées par la propriété suivante : les deux rayons vecteurs, menés de chacun de leurs points aux deux foyers étant pris chacun avec une quantité constante, sont dans le rapport de la réfraction.

Ainsi, supposons que ρ et ρ' représentent les deux rayons vecteurs, menés d'un point de la surface dirimante vers le point lumineux et vers le point par lequel passent les rayons réfractés, on aura :

$$\frac{\rho - a}{\rho' - b} = n, \text{ pour la réfraction},$$

$$\frac{\rho - a}{\rho' - b} = -1, \text{ pour la réflexion};$$

a et b sont des constantes positives ou négatives, et qu'on peut regarder comme les rayons de deux sphères qui ont les foyers pour centres; $\rho - a$ et $\rho' - b$ sont alors les portions des rayons vecteurs, extérieures à ces phères. Ces équations peuvent encore être mises sous une forme un peu différente, en écrivant :

$$\rho - \rho' n = r, \quad \text{si l'on fait} \quad r = a - bn$$

$$\rho + \rho' = r, \quad - \; - \quad r = a + b;$$

on voit d'abord que *si l'on ne donne que les deux foyers de la surface dirimante, et le rapport de la réfraction, le problème doit rester indéterminé;* car à chaque valeur de r correspond à une surface différente. De plus, pour une valeur donnée de r, tout est déterminé; ainsi *la surface dirimante est entièrement*

connue, quand on a ses deux foyers, un point de sa surface et le rapport de la réfraction.

La dernière des équations précédentes caractérise, comme on sait, les surfaces du second degré. L'autre équation appartient à des surfaces du quatrième degré, qui peuvent se réduire, dans certains cas, à des surfaces du second. Leurs propriétés sont très-remarquables et sont analogues à celles des surfaces du second degré, du moins quant aux foyers. Ces surfaces méritent, sous tous les rapports, un examen particulier, car elles semblent jouer un grand rôle dans les phénomènes de la physique; aussi nous accueillerons avec reconnaissance les communications qu'on voudrait bien nous faire sur une *théorie des surfaces à deux foyers conjugués.*

Si l'on rapporte les surfaces à des axes rectangulaires, en plaçant les foyers sur l'axe des z; et, en nommant z' et z'' leurs distances respectives à l'origine, l'équation en coordonnées rectangulaires devient

$$[(z-z')^2+x^2+y^2]^{\frac{1}{2}} + [(z-z'')^2+x^2+y^2]^{\frac{1}{2}}n=r.$$

C'est l'équation à laquelle *Malus* est parvenu par son analise, mais qu'il abandonne aussitôt sans remarquer qu'elle peut se traduire sous la forme la plus simple, et donner lieu à une quantité de propriétés curieuses (1). Observons avant tout que

1° *Les équations des surfaces dirimantes qui ont deux foyers conjugués, ne s'élèvent pas au delà du quatrième degré;*

2° *Ces équations ne peuvent s'abaisser au troisième degré; mais dans quelques cas particuliers, elles deviennent du second;*

3° *Les surfaces réfléchissantes qui ont deux foyers conjugués, ne s'élèvent pas au delà du second degré;*

4° *Les surfaces réfléchissantes ou dirimantes qui ont deux foyers conjugués sont nécessairement de révolution.*

---

(1) Je dois ajouter ici que M. *J. Herschel*, qui a traité le cas particulier où tout se passe dans un plan, a remarqué la relation qui existe entre les rayons vecteurs. (Voyez l'*Encycl. métrop.* de Londres, article LUMIÈRE.)

Puisque les surfaces que nous considérons sont des surfaces de révolution, nous pouvons, pour plus de simplicité, nous borner à considérer leurs sections méridiennes; nous trouverons alors que :

1° *A chaque valeur que prend la constante* r, *répond une courbe dirimante qui se compose en général de deux branches ;*

2° *Deux rayons vecteurs, menés des deux foyers à un même point de la courbe, forment avec la normale des angles dont les sinus sont partout dans un rapport constant ;*

3° *Le produit de deux rayons vecteurs qui sont menés d'un même foyer aux deux branches de la courbe, et dont les directions coïncident, est une quantité constante ;*

4° *Dans un cas particulier, quand* r=o, *les deux branches se confondent et forment une circonférence de cercle* (1) ;

5° *Cette circonférence est tellement placée par rapport à toutes les autres courbes dirimantes, qu'elle est le lieu des centres de tous les cercles qui, touchant une branche, sont en même temps tangens à l'autre branche de chaque courbe ;*

5° *Quand* r *est égale à la distance des deux foyers, la courbe dirimante est une épicycloïde très-remarquable, en ce qu'elle peut aussi être considérée comme la trajectoire orthogonale de tous les rayons réfléchis par la circonférence diamètre, les rayons continuant à être émanés de l'un des deux foyers* (2) ;

7° *La circonférence diamètre étant considérée comme courbe dirimante, les rayons lumineux partis d'un des foyers, se réfractent de manière à devenir perpendiculaires à l'une ou à l'autre des courbes dont nous avons parlé précédemment, et dont la détermination dépend ici du rapport de réfraction.* Il est superflu de dire que les rayons réfractés ne passent plus alors par un

---

(1) C'est le cas particulier qui a été examiné par M. *Delarive.*

(2) Nous nous étions déjà beaucoup occupés de ces épicycloïdes, M. *Dandelin* et moi, nous avions même reconnu quelques propriétés des foyers. Voyez les *Mémoires de l'Acad. Royale de Bruxelles.* M. *Dandelin* y a donné un tableau fort curieux sur les analogies des propriétés des foyers dans ces courbes et dans celles du second degré.

même foyer, mais ils forment la caustique ordininaire du cercle.

Je ne pousserai pas plus loin l'énumération des propriétés de ces courbes, qui se démontrent de la manière la plus simple. Je me propose d'ailleurs de les rattacher à un travail particulier. Ce qui précède montre déjà que la circonférence diamètre mérite une attention toute particulière dans la discussion des lignes dirimantes qui ont deux foyers.

En résumant les propriétés principales que nous venons d'énoncer, on voit que ces lignes, *pour les deux mêmes foyers*, peuvent être considérées, ou comme des *courbes dirimantes*, ou comme *les trajectoires orthogonales* des rayons réfractés par une circonférence. Considérées comme courbes dirimantes, elles varient par un paramètre, et le rapport de la réfraction est supposé constant; considérées comme trajectoires orthogonales de rayons réfractés, elles varient par le rapport de la réfraction, qui est variable, et la ligne dirimante, qui est une circonférence de cercle, est supposée déterminée de position et de grandeur.

Dans le cas particulier où l'un des foyers est à l'infini, les rayons qui partent de ce point ou qui se dirigent vers lui, sont parallèles, et on peut les considérer comme perpendiculaires à un même plan. Dans ce cas, *les surfaces dirimantes sont caractérisées par la propriété suivante : les deux rayons vecteurs, menés de chacun de leurs points, l'un au foyer donné, l'autre perpendiculairement au plan fixe, étant pris chacun avec une quantité constante, sont dans le rapport de la réfraction.*

Cette génération conduit aux résultats suivans :

1° *La surface dirimante, dont un des foyers est à l'infini, est un ellipsoïde ou un hyperboloïde qui dépend de la grandeur du rapport* n (ce cas a été traité analitiquement par *Malus*);

2° *La surface réfléchissante, dont un des foyers est à l'infini, est un paraboloïde*;

3° *Ces surfaces du second degré sont de révolution.*

Nous finirons par un cas assez remarquable que montre le calcul, c'est celui où le foyer est un point d'une surface plane

dirimante; les rayons alors se réfractent dans des directions qui se croisent le long d'une perpendiculaire au plan dirimant; de sorte que les foyers des rayons réfractés forment une série de points qui sont en ligne droite.

On a pu voir qu'il serait intéressant qu'on s'occupât des surfaces dont il est ici question, non-seulement parce qu'elles jouissent exclusivement de la propriété d'avoir deux foyers conjugués, quand on les considère comme surfaces réfléchissantes ou dirimantes; mais encore parce que ce sont les trajectoires orthogonales des rayons réfléchis ou réfractés par une surface sphérique pour des rayons émanés d'un point. Ces résultats me paraissent si simples et si curieux, qu'ils me sembleraient devoir s'être présentés déjà aux recherches des savans qui se sont occupés à différentes reprises des caustiques, par réflexion ou par réfraction, et particulièrement pour la sphère. Il est vrai que, par les théories connues, les calculs deviennent d'une complication extrême; aussi dans le cas où, à mon insçu, tous les résultats précédens seraient déjà connus, je croirai encore avoir rendu un service, en montrant avec quelle facilité les théorèmes que j'ai donnés sur les caustique se prêtent aux applications qu'on veut en faire.

Propriétés générales des coniques; par M. Chasles, ancien élève de l'école Polytechnique.

I.

(1) Nous allons établir un théorème fondamental dont nous déduirons ensuite, comme corollaires, de nombreuses propriétés générales ou particulières des coniques.

Théorème. *Si, ayant deux coniques quelconques, on tire une suite de transversales parallèles à un axe fixe, et qu'on prenne pour chaque transversale un point tel que les produits de ses distances aux deux points où cette droite rencontre chaque conique soient entre eux dans un rapport constant, le lieu*

géométrique de ce point sera une troisième conique qui passera par les points d'intersection des deux premières.

Ainsi soient A, B, les points où une des transversales rencontre la première conique, et C, D, les points où elle rencontre la seconde conique; si l'on prend sur cette droite un point *m* tel qu'on ait

$$\frac{\overline{mA}.\overline{mB}}{\overline{mC}.\overline{mD}}=\text{const.}=a,$$

les points *m* ainsi déterminés sur toutes les transversales, appartiendront à une conique qui passera par les points d'intersection des deux coniques proposées.

Soit O un point fixe pris sur une transversale, et x la distance du point *m* à ce point O; l'équation ci-dessus devient

$$(\overline{OA}-x)(\overline{OB}-x)=a.(\overline{OC}-x)(\overline{OD}-x);$$

équation du second degré en x; ce qui fait déjà voir que chacune des transversales ne rencontre la courbe cherchée qu'en deux points.

Si la transversale est menée par un des points de rencontre des deux coniques, les points A, C, se confondent, et la valeur $x=\overline{OA}=\overline{OC}$ satisfait à l'équation ci-dessus, ce qui prouve que la courbe cherchée passe par les points d'intersection des deux coniques.

Faisons voir maintenant qu'une droite quelconque L ne peut rencontrer la courbe cherchée qu'en deux points.

Supposons que le point O soit pris sur cette droite L, soient O′ le point où une seconde transversale rencontre cette droite, A′, B′; C′, D′, les points où cette seconde transversale rencontre les deux coniques, *m′* un point de la courbe cherchée située sur cette transversale; soient enfin P, Q, les points où la droite L rencontre la première conique, et R, S, les points où elle ren-

contre la seconde conique; on aura, comme on sait, dans la première conique,

$$\frac{\overline{OA}.\ \overline{OB}}{\overline{O'A'}.\overline{O'B'}}=\frac{\overline{OP}.\ \overline{OQ}}{\overline{O'P}.\overline{O'Q}};$$

soit $\overline{OO'}=\delta$, il vient

$$\frac{\overline{OA}.\ \overline{OB}}{\overline{O'A'}.\overline{O'B'}}=\frac{\overline{OP}.\ \overline{OQ}}{(\delta-\overline{OP})\,(\delta-\overline{OQ})}.$$

On a pareillement dans la seconde conique,

$$\frac{\overline{OC}.\ \overline{OD}}{\overline{O'C'}.\ \overline{O'D'}}=\frac{\overline{OR}.\ \overline{OS}}{(\delta-\overline{OR})\,(\delta-\overline{OS})}.$$

Ces deux équations donnent celle-ci :

$$\frac{\overline{OC}.\ \overline{OD}}{\overline{OA}.\ \overline{OB}}.\frac{\overline{O'A'}.\ \overline{O'B'}}{\overline{O'C'}.\ \overline{O'D'}}=\frac{\overline{OR}.\ \overline{OS}}{\overline{OP}.\ \overline{OQ}}.\frac{(\delta-\overline{OP})\,(\delta-\overline{OQ})}{(\delta-\overline{OR})\,(\delta-\overline{OS})}.$$

Supposons que le point O′ soit un point de rencontre de la droite L et de la courbe cherchée, on aura

$$\frac{\overline{O'A'}.\ \overline{O'B'}}{\overline{O'C'}.\ \overline{O'D'}}=a,$$

d'où

$$\frac{\overline{OC}.\ \overline{OD}}{\overline{OA}.\overline{OB}}.\,a=\frac{\overline{OR}.\ \overline{OS}}{\overline{OP}.\ \overline{OQ}}.\frac{(\delta-\overline{OP})\,(\delta-\overline{OQ})}{(\delta-\overline{OR})\,(\delta-\overline{OS})}.$$

Cette équation où il n'y a d'inconnue que $\delta=\overline{OO'}$, donnera les valeurs de δ qui détermineront les points O′ où la droite L

rencontre la courbe cherchée ; or, il n'y aura que deux valeurs de δ, ce qui prouve que cette droite ne rencontre la courbe qu'en deux points ; mais cette droite L est quelconque, on en conclut donc que la courbe en question n'est que du second degré. C. Q. F. D.

(2) Nous avons supposé pour écrire les équations ci-dessus, que les points A, B, etc., étaient réels ; mais ils peuvent être imaginaires, et les raisonnemens subsistent toujours ; les équations que nous avons posées sont toujours rationnelles, parce que les deux distances $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, par exemple, n'y entrent qu'en produit $\overline{OA}.\overline{OB}$, ou en somme $(\overline{OA}+\overline{OB})$ qui sont toujours réels, comme on sait.

Il est clair pareillement que les points d'intersection des deux coniques proposées peuvent être imaginaires.

Nous n'avons pas besoin de dire que le théorème précédent est susceptible d'une démonstration analitique très-facile (v. 13. Note). Nous avons préféré une démonstration purement géométrique, comme étant plus en rapport avec les conséquences que nous allons déduire de ce théorème, et aussi parce qu'elle est un nouvel exemple de la facilité avec laquelle les principes de la théorie des transversales peuvent suppléer souvent à l'emploi de l'analise algébrique.

(3) Il résulte du théorème que nous venons de démontrer, que trois coniques qui ont deux à deux les mêmes points d'intersection, réels ou imaginaires, jouissent de la propriété générale qui suit :

Quand trois coniques ont deux à deux les mêmes points d'intersection, réels ou imaginaires, si, par un point quelconque de la première, on mène une transversale parallèle à un axe fixe, les produits des distances de ce point aux points où la transversale rencontrera les deux autres courbes, seront entre eux dans un rapport constant, quel que soit le point pris sur la première courbe.

Ainsi soient m un point de la première conique ; A, B et C, D, les points où la transversale, menée par le point m, rencontre les

les deux coniques, le rapport $\frac{\overline{mA}.\overline{mB}}{\overline{mC}.\overline{mD}} = a$ sera constant, quel que soit le point m de la première conique.

En effet si, après avoir pris le rapport a des produits des distances d'un point m de la première conique, aux points où la transvesale menée par ce point, rencontre les deux autres courbes, on cherche sur une autre transversale quelconque un point dont le rapport des produits de ses distances aux points d'intersection des deux courbes par cette transversale soit égal à a, ce point sera d'après le théorème (1) sur la conique menée par le point m et par les quatre points d'intersection des deux coniques; ce point sera donc sur la première conique, puisque par cinq points on ne peut faire passer qu'une conique. Ainsi le théorème est démontré.

II.

(4) La transversale menée par le point m rencontre la première conique en un second point n pour lequel on a pareillement $\frac{\overline{nA}.\overline{nB}}{\overline{nC}.\overline{nD}} = a$; on a donc entre les six points m, n, A, B, C, D, la relation

$$\frac{\overline{mA}.\overline{mB}}{\overline{mC}.\overline{mD}} = \frac{\overline{nA}.\overline{nB}}{\overline{nC}.\overline{nD}}$$

qui est indépendante de la direction de la transversale; c'est-à-dire que :

Quand trois coniques ont deux à deux les mêmes points d'intersection (réels ou imaginaires), une transversale quelconque les rencontre en six points, tels que le rapport des produits des distances d'un point de l'une des courbes aux points des deux autres courbes est égal au rapport des produits des distances du second point de la première courbe aux mêmes points des deux autres courbes.

Quand six points en ligne droite sont disposés de manière

qu'une telle équation ait lieu, on dit qu'ils sont en *involution*, ainsi nous dirons que :

Quand trois coniques ont mêmes points d'intersection, toute transversale les rencontre en six points qui sont en involution.

(5) Ce théorème donne lieu, en supposant qu'une, ou deux, ou les trois coniques deviennent chacune l'ensemble de deux droites, à trois corollaires que voici :

1° *Quand deux coniques sont circonscrites à un quadrilatère, toute transversale rencontre les coniques et deux côtés opposés du quadrilatère en six points qui sont en involution ;*

2° *Quand un quadrilatère est inscrit dans une conique, toute transversale rencontre la conique, deux côtés opposés du quadrilatère et ses deux diagonales en six points qui sont en involution ;*

3° *Dans tout quadrilatère, une transversale quelconque rencontre ses quatre côtés et ses diagonales en six points qui sont en involution.*

(6) Ces trois propositions sont de la plus haute importance dans la théorie des coniques et dans celle des transversales, à cause des nombreuses conséquences qu'on en peut déduire.

La seconde notamment est d'une utilité bien reconnue, et pourrait même servir de base unique à une théorie géométrique des coniques. L'excellent mémoire de M. *Brianchon* sur les courbes du second ordre où se trouve la solution complète de ce problème : « Décrire une conique qui satisfasse aux cinq » conditions de passer par des points et de toucher des droi- » tes, » n'est que le développement des conséquences de cette seconde proposition.

M. *Poncelet* a aussi fait voir combien cette seconde proposition est féconde et offre de ressources dans la théorie des coniques (v. seconde section du *Traité des propriétés projectives*, où se trouve aussi un historique intéressant sur l'*involution* de six points).

On peut juger d'après cela combien la première proposition (1°) plus générale que la seconde (2°), offrirait d'avantages, étant substituée à cette seconde dans la théorie des coniques.

Mais ce n'est point du théorème (4), ni des trois corollaires que nous en avons déduits, que nous allons nous occuper en ce moment. C'est le théorème fondamental lui-même (1 ou 3) que nous allons discuter dans toute la généralité de son énoncé, mais en supposant que chacune des coniques proposées prenne une forme particulière.

III.

(7) Faisons d'abord remarquer que le théorème (3) donne une solution directe de ce problème :

Étant données deux coniques, un point et une droite, trouver les points d'intersection de cette droite et de la conique, non tracée, qui passerait par le point donné et par les quatre points d'intersection (réels ou imaginaires) des deux coniques proposées.

Par le point donné E on mènera une transversale parallèle à la droite donnée; soient P le produit des distances du point E aux points où cette transversale rencontre la première conique, et Q le produit des distances du même point E aux points où la transversale rencontre la seconde conique, on calculera le rapport $\frac{P}{Q} = a$.

En désignant par m le point où la droite donnée rencontre la conique inconnue, et par A, B, et C, D, les points où elle rencontre les deux coniques proposées, on aura, d'après le théorème (3),

$$\frac{\overline{mA}.\overline{mB}}{\overline{mC}.\overline{mD}} = a.$$

C'est cette équation qui fera connaître le point m.

Soit O un point fixe pris sur la droite donnée, et x la distance de ce point O au point m, cette équation devient

$$\frac{(\overline{OA} - x).(\overline{OB} - x)}{(\overline{OC} - x).(\overline{OD} - x)} = a,$$

ou

$$x^2(1-a)-[x\overline{OA}+\overline{OB}-(\overline{OC}+\overline{OD})a]+\overline{OA}.\overline{OB}-a.\overline{OC}.\overline{OD}=0$$

équation rationnelle qu'il s'agit de résoudre, ou de construire; ce qu'on fera avec la ligne droite et le cercle. Les deux valeurs de x détermineront les deux points où la droite donnée rencontrerait la conique qui passerait par le point donné et par les quatre points d'intersection des deux coniques données.

La construction de l'équation ci-dessus est le sujet d'un problème traité par le célèbre physicien et géomètre *John Leslie*, dans son *Analise Géométrique* (v. second supplément à la *Géométrie Descriptive* de M. *Hachette*, suivie de l'*Analise Géométrique* de *J. Leslie*).

IV.

(8) Le théorème (1) est susceptible d'un autre énoncé. En effet, si par le point m on mène une tangente $\overline{m\theta}$ à la première conique, θ étant le point de contact, le rapport $\frac{\overline{mA}.\overline{mB}}{\overline{m\theta}^2}$ sera égal, comme on sait, au rapport des carrés des diamètres de la conique parallèle à la transversale et à la tangente; soient D, Δ, ces diamètres, on aura donc

$$\frac{\overline{mA}.\overline{mB}}{\overline{m\theta}^2}=\frac{D^2}{\Delta^2}$$

Soient $\overline{m\theta'}$ la tangente menée du point m à la seconde conique, Δ' et D' les diamètres de cette courbe parallèles à sa tangente et à la transversale, on aura

$$\frac{\overline{mC}.\overline{mD}}{\overline{m\theta'}^2}=\frac{D'^2}{\Delta'^2}.$$

On a donc

$$\frac{\overline{mA}.\overline{mB}}{\overline{mC}.\overline{mD}}=\frac{\overline{m\theta}^2.D^2.\Delta'^2}{\overline{m\theta'}^2.D'^2.\Delta^2}=a$$

d'où $$\frac{\overline{m\theta}}{\Delta} : \frac{\overline{m\theta'}}{\Delta'} = \frac{D'}{D}\sqrt{a} = \text{const.}$$

ce qui fait voir que le théorème prend cet énoncé :

Étant données deux coniques quelconques, le lieu géométrique d'un point tel que les tangentes menées de ce point aux deux coniques, divisées respectivement par les diamètres des deux courbes parallèles à ces tangentes, soient entre elles dans un rapport constant, est une conique qui passe par les quatre points d'intersection (réels ou imaginaires) des deux coniques.

(9) On sait que quand deux coniques sont semblables et semblablement placées (ou *homothétiques*), elles ont deux points d'intersection (réels ou imaginaires) situés à l'infini ; et que réciproquement quand deux coniques ont deux points situés à l'infini, elles sont en général homothétiques. Si donc dans le théorème précédent les deux coniques proposées sont homothétiques, la troisième conique leur sera homothétique.

Si les deux coniques sont des cercles, la troisième sera donc aussi un cercle, et comme tous les diamètres d'un cercle sont égaux, le théorème (8) donne lieu à celui-ci :

Étant donnés deux cercles, si l'on cherche un point tel que les longueurs des tangentes menées de ce point aux deux cercles soient entre elles dans un rapport constant, ce point aura pour lieu géométrique un troisième cercle qui passera par les points d'intersection des deux proposés.

(10) L'un des cercles peut se réduire à un point, on a donc ce théorème :

Étant donnés un cercle et un point fixe, le lieu géométrique d'un point tel que sa distance au point fixe et la tangente menée de ce point au cercle soient entre elles dans un rapport constant, est un second cercle tel que ces deux cercles et le point fixe considéré comme un cercle infiniment petit ont mêmes points d'intersection (imaginaires, bien entendu).

(11) Le cercle proposé peut lui-même se réduire à un point, on a alors ce théorème :

Étant donnés deux points fixes, le lieu géométrique d'un point tel que ses distances aux deux points fixes soient entre elles dans un rapport constant est un cercle; ce cercle et les deux points fixes, considérés comme deux cercles infiniment petits, ont les mêmes points d'intersection. (*Voy*. plus haut p. 4, nº 4.)

La droite qui joint les deux points fixes étant considérée comme une transversale qui rencontre chacun des deux cercles infiniment petits en deux points qui se confondent, le théorème (4) relatif à l'involution de six points, fait voir que *la droite qui joint les deux points fixes est divisée harmoniquement par le cercle, lieu géométrique du point dont les distances aux deux points fixes sont entre elles dans un rapport donné.*

Cette proposition qui est un des porismes d'*Euclide* se trouve donc n'être qu'un cas particulier d'une propriété de deux cercles.

V.

(12) Chacune des coniques dans le théorème général (1 ou 3) peut être l'ensemble de deux droites; ce qui donne lieu à trois théorèmes différens, susceptibles eux-mêmes de diverses conséquences.

Si l'une des coniques est l'ensemble de deux droites, la distance d'un point m pris sur l'une quelconque des transversales au point où cette transversale rencontre l'une des deux droites, est proportionnelle à la perpendiculaire abaissée du point m sur cette droite, laquelle perpendiculaire mesure la distance du point m à cette droite, le théorème (1) peut donc s'énoncer ainsi :

Étant données une conique et deux droites, si l'on mène une série de transversales parallèles entre elles, et qu'on prenne sur chacune d'elles un point tel que le produit de ses distances aux points où cette transversale rencontre la conique, soit au produit des distances de ce point aux deux droites fixes dans un rapport constant, le lieu géométrique de ces points sera une conique qui passera par les points d'intersection de la conique proposée par les deux droites.

(13) Si la conique proposée est elle-même l'ensemble de deux droites, on a ce théorème :

Étant données quatre droites, si l'on cherche un point tel que le produit de ses distances aux deux premières droites, soit au produit de ses distances aux deux autres droites dans un rapport constant, ce point aura pour lieu géométrique une conique passant par les quatre points où les deux premières droites rencontrent les deux autres (1).

D'où l'on conclut cette propriété générale des coniques :

Un quadrilatère étant inscrit dans une conique, le produit des distances de chaque point de la conique à deux côtés opposés du quadrilatère est au produit des distances du même point aux deux autres côtés dans un rapport constant.

(14) Si l'on prend pour la conique, les deux diagonales du quadrilatère, on en conclut que :

Dans tout quadrilatère le produit des distances d'un point quelconque d'une des deux diagonales à deux côtés opposés est au produit des distances du même point aux deux autres côtés dans un rapport constant.

---

(1) Ce théorème a une certaine célébrité, parce qu'il fut connu des anciens, et surtout parce qu'il n'est qu'un cas particulier d'une question où échouèrent *Euclide* et *Apollonius*, et qui n'a été résolue dans sa généralité que par *Descartes*.

Cette question connue depuis sous le nom de *Problème de Pappus*, est celle-ci : « Étant données ($m+n$) droites dans un plan, trouver le lieu de » tous les points tels que le produit des distances de chacun d'eux aux m » premières droites soit au produit des distances de ce même point aux n » autres droites, dans un rapport donné. » (Voyez la *Géométrie de Descartes*, 1er et 2d livres.)

Il est clair que ce problème peut lui-même être considéré comme un cas particulier de celui-ci : Étant données deux courbes des degrés m et n, et » une série de transversales toutes parallèles entre elles, si l'on prend sur » chaque transversale un point tel que les produits de ses distances aux » points où cette droite rencontre les deux courbes respectivement soient » entre eux dans un rapport constant, trouver le lieu des points ainsi dé» terminés. »

Une marche tout-à-fait semblable à celle que nous avons suivie pour dé-

Théorème peu important et extrêmement facile à démontrer directement.

(15) Supposons dans le théorème (13) qu'un côté du quadrilatère devienne infiniment petit, sa direction sera la tangente à la conique; on aura donc ce théorème :

Un triangle étant inscrit dans une conique, le produit des distances d'un point quelconque de la conique à deux côtés du triangle est au produit des distances du même point au troisième côté et à la tangente à la conique menée par le sommet opposé à ce troisième côté, dans un rapport constant.

(16) Deux côtés opposés du quadrilatère peuvent se réduire tous deux à deux tangentes à la conique, alors les deux autres côtés se confondent suivant la droite qui joint les deux points de contact; on a donc ce théorème :

Un angle étant circonscrit à une conique, le produit des distances d'un point quelconque de la courbe aux deux côtés de cet angle est au carré de la distance du même point à la corde de contact dans un rapport constant.

Ce théorème a été démontré analitiquement par M. *Carnot*,

---

montrer le théorème (1), fait voir que ce lieu géométrique est une courbe d'un degré égal au plus élevé des deux m et n, et que cette courbe passe par les points d'intersection des deux courbes proposées.

Et en effet, les deux courbes proposées ayant pour équations $F(x,y)=o$, $f(x,y)=o$, et les transversales étant supposées parallèles à l'axe des x, l'équation de la courbe cherchée est

$$F(x,y):\frac{d^mF}{dx^m}\frac{1}{1.2...m}=af(x,y):\frac{d^nf}{dx^n}\frac{1}{1.2...n}$$

$\frac{d^mF}{dx^m}$ et $\frac{d^nf}{dx^n}$ sont des nombres, puisque les équations $F=o$, $f=o$, sont respectivement des degrés m et n; cette équation est donc d'un degré égal au plus élevé de ceux des deux courbes proposées. Elle fait voir de plus, que la courbe qu'elle représente, passe par les points d'intersection de ces deux courbes.

qui s'en est servi pour parvenir à plusieurs propriétés remarquables des polygones inscrits et circonscrits à une conique. (V. *Géométrie de Position*, p. 444 et suiv.).

VI.

(17) Reprenons le théorème (12), et supposons que la conique proposée soit un cercle, nous allons obtenir diverses propositions d'un genre particulier. D'abord on a celle qui suit, dont toutes les autres se déduiront :

Étant donnés un cercle et deux droites, si l'on cherche un point tel que le produit de ses distances aux deux droites soit au carré de la tangente menée de ce point au cercle, dans un rapport donné, ce point aura pour lieu géométrique une conique qui passera par les points (réels ou imaginaires) où les deux droites rencontreront le cercle.

(18) Si les deux droites se confondent en une seule, la conique aura un double contact (réel ou imaginaire) avec le cercle sur cette droite ; d'où l'on conclut que :

Étant donnés un cercle et une droite, le lieu géométrique d'un point tel que sa distance à la droite et la longueur de la tangente menée de ce point au cercle, soient entre elles dans un rapport constant, sera une conique ayant un double contact avec le cercle sur la droite donnée.

(19) Le cercle peut se réduire à un point, donc

Le lieu géométrique d'un point dont les distances à un point fixe et à une droite donnée, sont entre elles dans un rapport constant, est une conique; cette courbe a un double contact sur la droite donnée avec le point fixe considéré comme un cercle infiniment petit.

(20) La première partie de ce théorème fait voir que le point fixe est un foyer de la conique, et que la droite est la directrice correspondante à ce foyer; il résulte donc de la seconde partie du théorème que :

Chaque foyer d'une conique peut être considéré comme un

cercle infiniment petit ayant avec la conique un double contact imaginaire sur la directrice correspondante à ce foyer.

(21) Quand un cercle a un double contact avec une conique, son centre est évidemment sur l'un des deux diamètres principaux de la conique; le cercle est enveloppé par la conique ou l'enveloppe suivant que son centre est sur le grand ou sur le petit diamètre principal, la corde de contact est la droite sur laquelle a lieu le double contact. On conclut donc du théorème (18) cette propriété des coniques :

Si d'un point pris sur le grand axe d'une conique, comme centre, on décrit un cercle qui ait un double contact avec la conique, la longueur de la tangente menée d'un point quelconque de la courbe à ce cercle sera à la distance de ce point à la droite de contact dans un rapport constant.

Si l'on prend pour centre du cercle le foyer de la conique, nous avons vu (20) que le rayon du cercle est nul, et que la droite de contact devient la directrice.

(22) Considérons deux cercles ayant un double contact avec une conique, et leurs centres situés sur le grand axe de cette courbe; si d'un point de la conique on mène deux tangentes à ces cercles, elles seront proportionnelles aux distances de ce point aux deux droites de contact (21); la somme de ces deux tangentes dans le cas où le point pris sur la conique, sera entre les deux droites de contact, et leur différence dans le cas contraire, sera égale à la distance de ces deux droites de contact multipliée par une constante, cette somme, ou cette différence, sera donc constante; ainsi l'on a ce théorème :

Si de deux points pris par le grand axe d'une conique, comme centres, on décrit deux cercles ayant un double contact (réel ou imaginaire) avec la conique, de quelque point de cette courbe qu'on mène deux tangentes à ces cercles, leur somme ou leur différence sera une quantité constante.

(23) L'un des deux cercles peut se réduire à un point qui sera l'un des foyers de la courbe, donc

La distance de chaque point d'une conique à l'un de ses foyers plus ou moins la longueur de la tangente menée de ce point à un

cercle fixe ayant un double contact avec la conique et son centre sur le grand axe, est une quantité constante.

(24) Si enfin les deux cercles se réduisent à des points, ce seront les deux foyers de la conique, d'où l'on conclut que la somme ou la différence des rayons vecteurs menés des deux foyers d'une conique à un point de la courbe est constante.

Les théorèmes (21 et 22), qui sont une extension remarquable des propriétés des foyers d'une conique ont déjà été donnés par M. *Bobillier*, qui les a démontrés directement et d'une manière extrêmement simple, en considérant une conique comme la section d'un cône de révolution par un plan. (V. *Correspondance Mathématique* de M. *Quetelet*, t. III, p. 271.)

(25) Il résulte du théorème (22) que :

Étant donnés deux cercles, le lieu géométrique d'un point tel que la somme ou la différence des longueurs des tangentes menées de ce point aux deux cercles soit constante, est une conique ayant un double contact (réel ou imaginaire) avec chacun des deux cercles.

(26) Si l'un des cercles se réduit à un point, on en conclut que :

Étant donnés un cercle et un point, le lieu géométrique d'un point tel que sa distance au point donné, plus ou moins la longueur de la tangente menée de ce point au cercle, soit constante, est une conique ayant un double contact avec le cercle, et dont le point donné est un des foyers.

(27) Les théorèmes (21 et 22) sont susceptibles de quelques conséquences nouvelles relatives aux cercles osculateurs d'une conique menés par les extrémités de son grand axe; car on sait que chacun de ces cercles peut être considéré comme ayant un double contact avec la conique, les deux points de contact se réunissant en un seul; la corde de contact est la tangente au point de contact; il résulte donc du théorème (21) que :

Les tangentes menées des différens points d'une conique au cercle osculateur en un de ses sommets, sont proportionnelles aux distances de ces points à la tangente à la conique conduite par ce sommet.

(28) Le théorème (23) donne celui-ci :

Si d'un point quelconque d'une conique, on mène une tangente au cercle osculateur à l'une des extrémités du grand axe, la longueur de cette tangente moins la longueur du rayon vecteur mené du point de la courbe à l'un de ses foyers sera constante.

Ce théorème donne un moyen de construire le cercle osculateur à l'une des extrémités du grand axe ; car la longuenr de la tangente menée de l'autre extrémité de cet axe au cercle osculateur moins la distance de ce point à un foyer, sera égale à la distance de la première extrémité du grand axe à ce foyer ; la longueur de cette tangente sera donc connue et se trouve égale au double de l'excentricité ; le carré de cette tangente divisé par le grand axe est donc la distance du point où le cercle osculateur coupe le grand axe à la seconde extrémité de cet axe, d'où l'on conclut que le rayon du cercle est égal au carré du demi-petit axe divisé par le demi-grand axe.

(29) Enfin le théorème (22) fait voir que :

De quelque point d'une conique qu'on mène des tangentes aux deux cercles osculateurs aux extrémités de son grand axe, la somme de ces tangentes, si la conique est une ellipse, et leur différence si la conique est une hyperbole, sera constante.

Si cet article n'était déjà très-long, on pourrait ajouter plusieurs autres conséquences du théorème fondamental (1) ; par exemple on peut supposer qu'une conique étant l'ensemble de deux droites, une de ces droites ou toutes les deux passent à l'infini : mais ce qui précède suffit pour montrer combien l'usage de ce principe général serait utile dans l'étude des coniques, non-seulement comme moyen de recherches, mais comme formant un centre autour duquel viendraient se grouper un très-grand nombre des propriétés de ces courbes. Cela offrirait l'avantage de ne point nécessiter des démonstrations particulières et différentes de ces propriétés, et de mettre en évidence les points de contact qui les unissent entre elles, et les rendent dépendantes toutes d'un principe général qui peut pour ainsi dire les représenter.

Ajoutons que ce principe n'étant lui-même qu'un cas parti-

culier d'un théorème relatif aux courbes géométriques de tous les degrés, ainsi que nous l'avons dit (13, note), il présente l'avantage d'établir sous certains points de vue, des rapports entre les propriétés des coniques et celles des courbes de degrés plus élevés. C'est en effet la généralisation des propriétés des coniques qui peut conduire insensiblement à celles des courbes des 3ᵉ et 4ᵉ degrès encore si peu connues.

Chartres, janvier 1829.

De quelques propriétés résultantes des cercles qui touchent les directions des côtés d'un triangle; par J. N. Noel, principal de l'Athénée de Luxembourg.

Étant donnés les segmens que le cercle inscrit dans un triangle détermine sur ses côtés, il existe des formules pour calculer les valeurs numériques des lignes et aires qui proviennent de ce triangle et des cercles tangens à ses côtés. Ce que nous nous proposons ici, est de faire connaître plusieurs de ces formules et les conséquences qu'elles fournissent (1).

1. Soit ABC un triangle quelconque et O le centre du cercle inscrit, (*fig.* 1). On sait que les centres A', B', C', des cercles extérieurs qui touchent les directions des côtés, sont les intersections des perpendiculaires menées par les sommets A, B, C, sur les droites AO, BO et CO. Soient a', b', c', les valeurs numériques des rayons A'D, B'F, et C'E, de ces trois cercles; soit r' la valeur du rayon du cercle inscrit dans ABC, touchant les côtés en H, I, K; soient enfin a, b, c, les valeurs numériques des segmens AH ou AI, BH ou BK, CK ou CI. Si l'on désigne par A, B, C, les côtés du triangle ABC, respectivement opposés aux angles A, B, C, il est visible qu'on aura

$$A = b + c$$
$$B = a + c$$
$$C = a + b.$$

(1) On peut voir des recherches analogues, publiées par M. *Garnier*, dans le 1ᵉʳ vol. de la *Corresp. Mathém.*, pag. 179; voyez aussi *Annales Mathém.*, tome XIX, pag. 211 et 65. A. Q.

Mais il est connu que, pour l'aire S du triangle ABC, on a

$$16 S^2 = (A + B + C)(A + B - C)(A + C - B)(B + C - A);$$

substituant donc les valeurs précédentes de A, B, C, et réduisant, on trouvera

$$S = \sqrt{abc\,(a + b + c)} \ldots (1).$$

Et telle est l'aire du triangle en fonction des segmens que le cercle inscrit détermine sur les côtés.

2. Il est clair que le triangle ABC a les quatre valeurs : AOB + AOC + BOC, AA'B + AA'C — BA'C, BB'A + BB'C — AB'C, et CC'A + CC'B — AC'B. Si donc on passe aux expressions des aires, on obtiendra :

$$\begin{aligned}(A + B + C)\, r' &= 2\,S\\ (B + C - A)\, a' &= 2\,S\\ (A + C - B)\, b' &= 2\,S\\ (A + B - C)\, c' &= 2\,S.\end{aligned}$$

Substituant les valeurs de A, B, C, et posant, pour abréger, $a + b + c = m$, il viendra

$$mr' = S,\ aa' = S,\quad bb' = S \text{ et } cc' = S, \ldots (2)$$

Ces équations déterminent les quatre rayons r', a', b', c', et on en tire, en substituant la valeur (1) de S,

$$r' = \sqrt{\frac{abc}{m}},\ a' = \sqrt{\frac{bcm}{a}},\ b' = \sqrt{\frac{acm}{b}} \text{ et } c' = \sqrt{\frac{abm}{c}}.$$

3. Soit r le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC ; on sait que

$$r = \frac{ABC}{4S};\ \text{d'où}\ r = \frac{(b + c)(a + c)(a + b)}{4S}.$$

4. Cherchons maintenant les valeurs des droites qui joignent

deux à deux les quatre centres O, A′, B′, C′; et d'abord observons que le triangle rectangle AOH donne $AO=\sqrt{a^2+r'^2}$. Substituant la valeur de r' et ayant égard à ce que $m=a+b+c$, on aura

$$AO=\sqrt{\frac{a}{m}(a+b)(a+c)}.$$

On aurait de même

$$BO=\sqrt{\frac{b}{m}(a+b)(b+c)}.$$

$$CO=\sqrt{\frac{c}{m}(a+c)(b+c)}.$$

Les triangles semblables AOH et AC′E donnent

$$AO:C'A::a:c';\text{ d'où } C'A=\frac{c'}{a}\times AO.$$

Substituant les valeurs de c' et de AO, il viendra

$$C'A=\sqrt{\frac{b}{c}(a+b)(a+c)}.$$

On trouverait de même

$$AB'=\sqrt{\frac{c}{b}(a+b)(a+c)}.$$

Et puisque $B'C'=AB'+AC'$, il vient, en substituant et en réduisant,

$$B'C'=(b+c)\sqrt{\frac{(a+b)(a+c)}{bc}}$$

on aura pareillement

$$A'C' = (a+c)\sqrt{\frac{(a+b)(b+c)}{ac}}\,,$$

$$A'B' = (a+b)\sqrt{\frac{(a+b)(b+c)}{ab}}\,.$$

Le triangle rectangle OAC′ donne $OC'^2 = OA^2 + AC'^2$: substituant les valeurs de OA et de AC′, on obtiendra

$$OC' = (a+b)\sqrt{\frac{(a+c)(b+c)}{cm}}$$

de même, on aura

$$OB' = (a+c)\sqrt{\frac{(a+b)(b+c)}{bm}}$$

$$OA' = (b+c)\sqrt{\frac{(a+b)(a+c)}{am}}\,.$$

5. Voyons présentement comment on peut calculer les aires des triangles dont les sommets sont trois des quatre centres O, A′, B′ et C′. D'abord l'aire du triangle B′OC′ étant $\frac{1}{2}$ B′C′×AO, il vient, en substituant les valeurs de B′C′ et de AO, et à cause de $\sqrt{abcm} = S$,

$$B'OC' = \frac{a(a+b)(a+c)(b+c)}{2S}.$$

Semblablement,

$$B'OA' = \frac{c(a+b)(a+c)(b+c)}{2S},$$

$$A'OC' = \frac{b(a+b)(a+c)(b+c)}{2S};$$

d'où
$$A'B'C' = \frac{(a+b+c)(a+b)(a+c)(b+c)}{2S}.$$

Comparant ces valeurs à celle trouvée plus haut pour le rayon r, on en conclura

$$B'OC'=2ar, \quad B'OA'=2cr, \quad A'OC'=2br \quad \text{et} \quad A'B'C'=2(a+b+c)r.$$

Chacune de ces valeurs fournit un théorème. Voici le dernier : *L'aire du triangle $A'B'C'$ qui joint les centres des trois cercles ex-inscrits à un triangle donné, est égale au périmètre de ce dernier triangle multiplié par le rayon du cercle circonscrit.*

6. Soient x, y, z, v, les rayons des cercles circonscrits aux quatre triangles B'OC', B'OA', A'OC' et A'B'C'. On sait que le rayon x du cercle circonscrit à B'OC', a pour expression

$$x=\frac{B'C'.\ OB'.\ OC'}{4B'C'.\ \frac{1}{2}\ OA}=\frac{OB'.\ OC'}{2OA}.$$

Substituant les valeurs de OB', OC' et OA, on trouvera, en réduisant,

$$x=\frac{(a+b)(a+c)(b+c)}{2S}=2r.$$

On aura semblablement $y=2r$, $z=2r$ et $v=2r$. De là résulte ce théorème :

La circonférence qui passe par les centres de trois quelconques des quatre cercles qui touchent les côtés d'un triangle, est double de celle qui passe par les sommets de ce triangle.

7. Appelons P le point de rencontre des perpendiculaires A'D et B'F. Menons DL, Pn et FG perpendiculaires à A'B'. Les triangles équiangles A'DL et COK, B'FG et OCI, donneront évidemment A'L : c : : DL : r' et B'G : c : : FG : r' ; d'où l'on tire

$$\frac{DL}{A'L}=\frac{r'}{c}=\frac{FG}{B'G}.$$

Les triangles équiangles A′DL et A′Pn, B′FG et B′Pn, fournissent d'ailleurs

$$A'L : A'n :: DL : Pn = \frac{DL}{A'L} \times A'n = \frac{r'}{c} \times A'n,$$

$$B'G : B'n :: FG : Pn = \frac{FG}{B'G} \times B'n = \frac{r'}{c} \times B'n.$$

On voit que $A'n = B'n = \frac{1}{2} A'B'$. Si donc on substitue la valeur de $\frac{1}{2}$ A′B′, on aura

$$Pn = \frac{r'}{c} \times \frac{a+b}{2} \sqrt{\frac{(a+c)(+b\ c)}{ab}}.$$

Avec cette valeur et celle de $\frac{1}{2}$ A′B′, le triangle rectangle A′Pn donnera

$$A'P = B'P = \frac{(a+b)(a+c)(b+c)}{2S} = 2r.$$

D'où il suit que les perpendiculaires A′D et B′F se coupent au centre du cercle passant par les points A′, B′, C′. On verrait de même que les perpendiculaires B′F et C′E se coupent au même centre.

De là on tire ce théorème : *Si des centres des trois cercles ex-inscrits à un triangle, on abaisse des perpendiculaires sur les côtés de ce triangle (et non sur leurs prolongemens), ces perpendiculaires se couperont au centre de la circonférence qui passe par les trois centres dont il s'agit.*

8. Soit N le point de rencontre des perpendiculaires A′N et B′N menées sur les prolongemens des côtés AC et BC. A cause des deux angles CA′N et CB′N égaux entre eux et aux deux angles CA′D et CB′F, les deux triangles A′B′N et A′B′P sont égaux; donc $A'N = B'N = A'P = 2r$. Par conséquent N est

le centre du cercle qui passe par les trois points A′, B′ et O.

Donc *si des centres des cercles ex-inscrits à un triangle*, *on abaisse des perpendiculaires sur les prolongemens de ses côtés*, *ces perpendiculaires se couperont deux à deux aux centres des circonférences qui passent par deux des centres de ces cercles et par celui du cercle inscrit dans le même triangle*.

9. Il est facile de voir que les centres des trois cercles ex-inscrits à un triangle, et les centres des trois circonférences qui passent par deux des trois précédens et par le centre du cercle inscrit dans le même triangle, sont les sommets d'un hexagone ayant ses côtés parallèles deux à deux, tous égaux à $2r$, et dont l'aire est double de celle du triangle qui joint les centres des trois cercles ex-inscrits proposés.

10. Dans le triangle rectangle CA′D, on trouve que $CD = b$. On aurait de même $AE = b$, $BD = AF = c$ et $BE = CF = a$. Ainsi *chaque cercle ex-inscrit à un triangle*, *détermine sur le côté auquel il est tangent*, *deux segmens respectivement égaux à ceux déterminés sur ce côté par le cercle inscrit*.

11. Remarquons encore que *si par les centres des trois cercles ex-inscrits à un triangle*, *on élève des perpendiculaires aux droites qui joignent ces centres à celui du cercle inscrit au même triangle*, *ces perpendiculaires termineront un triangle T*, *composé de quatre autres triangles équivalens chacun à celui qui joint les centres des trois mêmes cercles ex-inscrits*. Ce théorème se démontre aisément, d'après les formules qui précèdent; et l'on verra aussi que les perpendiculaires menées des sommets du triangle total T sur les côtés de A′B′C′, déterminent sur ces côtés, des segmens respectivement égaux à ceux déterminés sur les mêmes côtés par les sommets de ABC.

12. Si dans l'équation (1) et la première des quatre équations (2), on substitue les valeurs de a, b, c, tirées des trois dernières, on aura

$$S = \sqrt{a'b'c'r'} \quad \text{et} \quad \frac{1}{a'} + \frac{1}{b'} + \frac{1}{c'} = \frac{1}{r'}.$$

Donc, 1° *L'aire d'un triangle est égale à la racine carrée du*

produit des rayons des quatre cercles qui touchent à la fois les directions de ces côtés ; 2° la somme des valeurs inverses des rayons des trois cercles extérieurs est égale à la valeur inverse du rayon du cercle intérieur.

13. Substituant dans l'expression du rayon r, les valeurs de $a+b$, $a+c$ et $b+c$, tirées de $a+b+c=m$; développant et réduisant, on aura

$$r=\frac{1}{4S}(abm+acm+bcm-abc);$$

d'où à cause de $S^2=abcm$, il vient

$$r=\frac{1}{4}\left(\frac{S}{a}+\frac{S}{b}+\frac{S}{c}-\frac{S}{m}\right);$$

ce qui, d'après les équations (2), se réduit à

$$r=\frac{1}{4}(a'+b'+c'-r').$$

Ainsi *quatre fois le rayon du cercle circonscrit à un triangle, valent la somme des rayons des trois cercles ex-inscrits moins le rayon du cercle inscrit.*

Ce théorème et ceux des n°s 6 et 12, sont indiqués, d'après la trigonométrie, à la page 183 de mes *Mélanges de mathématiques*, imprimés en 1822.

14. Au moyen des relations que nous venons d'établir, il sera aisé de démontrer, par les simples élémens d'algèbre et de géométrie, le curieux théorème que voici :

De tous les triangles circonscrits à un même cercle, l'équilatéral est celui qui a le moindre contour, la moindre surface, le moindre cercle circonscrit, la moindre somme des cercles qui touchent les directions de ses côtés, la moindre somme des circonférences de ces cercles, et enfin, la moindre somme des triangles ayant leurs sommets aux centres des mêmes cercles.

15. On peut également démontrer, avec facilité, ce théorème: *De tous les triangles de même périmètre, l'équilatéral est celui qui a la plus grande surface, le plus grand cercle inscrit, le moindre cercle circonscrit, la moindre somme des trois cercles ex-inscrits, la moindre somme de leurs circonférences, et enfin, la moindre somme des triangles qui joignent les centres des cercles inscrit et ex-inscrit.*

16. La comparaison des formules établies dans les précédens numéros, conduit encore à d'autres théorèmes remarquables; mais nous nous bornerons à ceux qui viennent d'être énoncés.

Sur les limites des racines des équations littérales du troisième degré; par M. Van Rees, professeur à l'Université de Liége.

Soit
$$x^3 + 3px^2 + 3qx + r = o \qquad (1)$$

une équation quelconque du troisième degré. Si l'on construit la courbe dont l'équation entre les coordonnées rectangulaires est

$$x^3 + 3px^2 + 3qx + r = y. \qquad (2)$$

Les abscisses des points où elle coupe l'axe des x indiquent les valeurs des racines réelles de (1).

Dans le cas où les racines de (1) sont toutes réelles, la courbe (2) coupe l'axe en trois points B, C, D (*fig.* 2). Elle aura donc nécessairement un *maximum* PM et un *minimum* QN d'ordonnées, dont les abscisses respectives AP, AQ, sont données par l'équation $\frac{dy}{dx} = o$, ou

$$x^2 + 2px + q = o \qquad (3)$$

Donc, en désignant par x', y', les coordonnées du point M, et par x'', y'', celles du point N, on aura

$$x' = -p - \sqrt{p^2 - q} \qquad x'' = -p + \sqrt{p^2 - q} \qquad (4)$$

et ces valeurs substituées dans (2), donneront pour y les valeurs y', y'', de signes contraires, ou dont le produit sera négatif; on parvient ainsi facilement à la condition nécessaire pour l'existence des trois racines réelles.

Au point M menons la tangente MM'. Elle rencontre la branche ascendante de la courbe en un point M'. Pour avoir l'abscisse de ce point, il suffit d'observer que l'équation de MM' étant $y = y'$, les abscisses des points qui lui sont communs avec la courbe sont données par l'équation

$$x^3 + 3px^2 + 3qx + r = y'.$$

Des trois racines de cette équation, deux appartiennent au point de contact M ; elles sont donc $= x'$. Et comme d'ailleurs la somme des trois racines est $= -3p$, la troisième sera $= -3p - 2x'$. On a donc, en substituant à x' sa valeur (4),

$$\mathrm{AP}' = -p + 2\sqrt{p^2 - q}.$$

Si on mène une seconde tangente en N, rencontrant la branche descendante de la courbe en N', on trouve de la même manière que l'abscisse AQ de ce point est $= -3p - 2x''$, ou

$$\mathrm{AQ}' = -p - 2\sqrt{p^2 - q}.$$

Or, il est évident que les points d'intersection de la courbe et de l'axe, sont nécessairement compris entre les points Q', P, Q, P', pris successivement deux à deux. Donc on aura le théorème suivant, qui peut être souvent utile dans la discussion des équations littérales du troisième degré :

Lorsque l'équation

$$x^3 + 3px^2 + 3qx + r = o$$

a trois racines réelles, celles-ci se trouvent comprises entre les quantités

$$-p-2\sqrt{p^2-q},\ -p-\sqrt{p^2-q},\ -p+\sqrt{p^2-q},\ -p+2\sqrt{p^2-q},$$

prises deux à deux dans l'ordre de leur succession.

Si au contraire l'équation (1) n'a qu'une racine réelle, les points M, N, peuvent encore être réels, mais ils seront placés alors, ainsi que les points M', N', d'un même côté de l'axe. Donc, *lorsque l'équation*

$$x^3+3px^2+3qx+r=o$$

a une seule racine réelle, celle-ci se trouve en dehors des quantités

$$-p-2\sqrt{p^2-q},\qquad -p+2\sqrt{p^2-q}$$

De trois plans rectangulaires l'un est toujours tangent à une sphère de rayon R, l'autre à une sphère de rayon R', et le troisième à une sphère de rayon R''. Ces trois sphères sont concentriques. Quelle est la surface engendrée par leur point d'intersection? On pourra varier le problème, en supposant trois axes rectangulaires au lieu de trois plans. Question proposée à la page 284, du tome IV, et résolue par M. Heichen, candidat en sciences à l'Université de Louvain.

Plaçons l'origine des coordonnées au centre commun des trois sphères et soient :

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma;\ \alpha',\ \beta',\ \gamma';\ \alpha'',\ \beta'',\ \gamma'',$$

les coordonnées correspondantes à :

$$R,\quad R',\quad R''.$$

Il viendra donc :

$$\begin{aligned} \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 &= R^2. \\ \alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 &= R'^2. \qquad (1) \\ \alpha''^2 + \beta''^2 + \gamma''^2 &= R''^2. \end{aligned}$$

Désignant par x, y, z; x', y', z'; x'', y'', z'', les coordonnées de trois plans respectivement tangens à R, R', R'', nous aurons un second système d'équations :

$$\begin{aligned} \alpha x + \beta y + \gamma z &= R^2. \\ \alpha' x' + \beta' y' + \gamma' z' &= R'^2. \qquad (2) \\ \alpha'' x'' + \beta'' y'' + \gamma'' z'' &= R''^2. \end{aligned}$$

et comme ces trois plans doivent être perpendiculaires l'un à l'autre, il en résulte un troisième système de relations :

$$\begin{aligned} \alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' &= o \\ \alpha\alpha'' + \beta\beta'' + \gamma\gamma'' &= o \qquad (3) \\ \alpha'\alpha'' + \beta'\beta'' + \gamma'\gamma'' &= o \end{aligned}$$

Puisque les trois plans doivent se couper en un même point, on aura pour ce point :

$$x' = x'' = x; \; y' = y'' = y; \; z' = z'' = z,$$

cela change les relations (2) en celles-ci :

$$\begin{aligned} \alpha x + \beta y + \gamma z &= R^2. \\ \alpha' x + \beta' y + \gamma' z &= R'^2. \qquad (4) \\ \alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' z &= R''^2. \end{aligned}$$

Si au moyen des équations (1) (3) et (4), nous pouvions éliminer les neuf quantités α, β, γ; α', β', γ'; $\alpha'', \beta'', \gamma''$; l'équation résultante en x, y, z, R, R', R'', appartiendrait nécessairement au lieu géométrique de tous les points d'intersection des trois plans tangens dont il s'agit.

Mais au lieu de suivre la voie ordinaire de l'élimination, qui entraînerait ici dans des calculs compliqués, nous observons que si l'on a en général deux systèmes d'équations tels que (1) et (3), on aura pareillement :

$$\left.\begin{aligned}\frac{\alpha^2}{R^2}+\frac{\alpha'^2}{R'^2}+\frac{\alpha''^2}{R''^2}&=1.\\ \frac{\beta^2}{R^2}+\frac{\beta'^2}{R'^2}+\frac{\beta''^2}{R''^2}&=1.\\ \frac{\gamma^2}{R^2}+\frac{\gamma'^2}{R'^2}+\frac{\gamma''^2}{R''^2}&=1.\end{aligned}\right\}\ldots\ldots(A)$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\alpha\beta}{R^2}+\frac{\alpha'\beta'}{R'^2}+\frac{\alpha''\beta''}{R''^2}&=o;\\ \frac{\alpha\gamma}{R^2}+\frac{\alpha'\gamma'}{R'^2}+\frac{\alpha''\gamma''}{R''^2}&=o\\ \frac{\beta\gamma}{R^2}+\frac{\beta'\gamma'}{R'^2}+\frac{\beta''\gamma''}{R''^2}&=o.\end{aligned}\right\}\ldots\ldots(B).$$

Puissant a démontré cette proposition, et il est inutile de la répéter ici. Cela posé, élevons au carré les équations (4), et divisons-les respectivement par R^2, R'^2, R''^2; nous aurons en les ajoutant et réduisant au moyen des relations (A) et (B),

$$x^2+y^2+z^2=R^2+R'^2+R''^2.$$

Ainsi la surface cherchée est une sphère concentrique aux trois sphères données, et dont le rayon est : $\sqrt{R'+R'^2+R''^2}$.

Solution de la même question, par M. Le François, Instituteur à Bruges (1).

Dans les deux cas de l'énoncé, le lieu géométrique cherché est la surface d'une sphère concentrique aux trois autres. Ces résul-

(1) Nous avons reçu de M. *Le François* deux solutions, l'une analitique et l'autre géométrique. L'auteur a considéré les deux cas que présente l'é-

tats se vérifient aisément par la géométrie élémentaire. Car, dans le premier cas de la question, la distance du sommet de l'angle trièdre, formé par les trois plans rectangulaires au centre commun des sphères, est une constante égale à la diagonale d'un parallèlipipède rectangle, qui aurait pour arêtes les trois rayons R, R', R'', des sphères données. Cette distance est donc

$$\sqrt{R^2+R'^2+R''^2}.$$

Quant au second cas, soient OT, OT', OT'', les rayons R, R', R'', respectivement perpendiculaires aux axes rectangulaires AT, AT', AT'', on aura toujours pour toute position de A (*fig.* 3.)

$$\overline{OA}^2=\overline{OT}^2+\overline{AT}^2$$

$$\overline{OA}^2=\overline{OT'}^2+\overline{AT'}^2$$

$$\overline{AT'}^2=\overline{OT''}^2-\overline{AT}^2$$

d'où en ajoutant, réduisant et substituant

$$n^2=\frac{1}{2}(R^2+R'^2+R''^2).$$

D représentant la distance OA. Donc cette distance est constante.

Solution et développement du même problème, par M. le docteur Reiss, de Francfort.

Que la surface en question soit engendrée par le point d'intersection de trois plans, ou par celui de trois axes rectangulai-

---

noncé du problème; quoique ses formules analitiques aient beaucoup d'élégance, comme elles diffèrent peu de celles de l'article précédent, et que d'ailleurs, la question se trouve traitée avec plus de généralité encore dans l'article qui suit, nous nous bornerons à présenter à nos lecteurs la seconde solution de M. *Le François*. A. Q.

res, elle sera toujours une sphère concentrique aux trois sphères données. En effet, soient M et N deux points qui satisfassent aux conditions de la question; en les joignant par des droites au centre commun des sphères, il y aura identité dans les relations de ces droites avec les trois sphères, ainsi que dans les conditions auxquelles les points M et N sont assujettis; donc il n'y a point de raison pour que ces mêmes droites soient de différente grandeur. Nous reviendrons plus tard sur cet énoncé, en le vérifiant par le calcul qui, en même-temps, nous fera connaître le rayon de la sphère cherchée. Mais avant que d'entrer dans ces détails, nous allons donner le moyen de résoudre le cas plus général, où il ne s'agit que de trois sphères dont la position et le rayon sont donnés d'une manière quelconque. Nous traiterons à part du problème qui suppose trois axes rectangulaires, et de celui qui suppose trois plans. Le premier étant le moins compliqué, nous commencerons par en donner l'analise, et nous lui ferons succéder dans un autre article celle du second problème.

Il faut remarquer d'abord que notre problème est indéterminé sous cette forme, et nous pourrions le démontrer au moyen d'un raisonnement géométrique; mais nous le verrons d'ailleurs suffisamment par les équations que donnera l'analise suivante.

Soient S', S'', S''', les trois sphères données; r', r'', r''', leurs rayons; C', C'', C''', leurs centres. Soient x, y, z, les coordonnées rectangulaires d'un point M de la surface à déterminer, par rapport à trois axes rectangulaires X, Y, Z, dont le point d'intersection est supposé l'origine des coordonnées. Soient x', y', z'; x'', y'', z''; x''', y''', z''', les coordonnées du même point par rapport à des systèmes d'axes X', Y', Z'; X'', Y'', Z''; X''', Y''', Z''', parallèles entre eux et au premier système, et dont C', C'', C''', sont en même temps les points d'intersection et les origines des coordonnées (1).

(2) Dans chaque cas spécial on connaîtra la relation de x', y', z'; x'', y'', z''; x''', y''', z''' avec x, y, z; il n'y a donc entre toutes ces grandeurs d'autres inconnues que x, y, z.

Qu'on appelle à présent τ', τ'', τ''', les droites qui, se coupant au point M, sont en même temps tangentes aux sphères S', S'', S''', et perpendiculaires entre elles. Les plans passant par τ' et MC'; τ'' et MC''; τ''' et MC''', couperont les plans X'Y', X''Y'', X'''Y''', suivant des droites qui feront des angles α', α'', α''' avec X', X'', X''', ou bien avec la direction des x.

Si l'on abaisse des perpendiculaires MP', MP'', MP''' de M sur ces droites, et qu'on fasse

$$\text{MP}' = {}'y'\ ;\ \text{MP}'' = {}'y''\ ;\ \text{MP}''' = {}'y'''\ ;$$
$$\text{C}'\text{P}' = {}'x'\ ;\ \text{C}''\text{P}'' = {}'x''\ ;\ \text{C}'''\text{P}''' = {}'x'''\ ;$$

on trouvera, en égalant les angles formés par MP' et τ', par MP'' et τ'', par MP''' et τ''' à M', M'', M''';

$$\text{tang. M}' = \frac{{}'x'\sqrt{{}'x'^2 + {}'y'^2 - r'^2} + r'.{}'y'}{{}'y'\sqrt{{}'x'^2 + {}'y'^2 - r'^2} - r'.{}'x'}.$$

En remplaçant les accens à droite de $'x'$, $'y'$, $'r'$, par les accens correspondans, on obtiendra les équations de tang. M'', tang. M'''. Faisons pour abréger :

$$ {}'x'^2 + {}'y'^2 = m'^2\ ;\ {}'x''^2 + {}'y''^2 = m''^2\ ;\ {}'x'''^2 + {}'y'''^2 = m'''^2\ ;$$
$$ m'^2 - r'^2 = \rho'^2\ ;\ m''^2 - r''^2 = \rho''^2\ ;\ m'''^2 - r'''^2 = \rho'''^2\ ;$$

on aura

$$\text{tan. M}' = \frac{{}'x'\rho' + r'.{}'y'}{{}'y'\rho' - r'.{}'x'},\ \text{tan. M}'' = \frac{{}'x''\rho'' + r''.{}'y''}{{}'y''\rho'' - r''.{}'x''},\ \text{tan. M}''' = \frac{{}'x'''\rho''' + r'''.{}'y'''}{{}'y'''\rho''' - r'''.{}'x'''}.$$

nous y ajoutons

$$\cos.\text{M}' = \frac{{}'y'\rho' - r'.{}'x'}{m'^2};\ \cos.\text{M}'' = \frac{{}'y''\rho'' - r''.{}'x''}{m''^2};\ \cos.\text{M}''' = \frac{{}'y'''\rho''' - r'''.{}'x'''}{m'''^2};$$

$$\sin.\text{M}' = \frac{{}'x'\rho' + r'.{}'y'}{m'^2};\ \sin.\text{M}'' = \frac{{}'x''\rho'' + r'.{}'y''}{m''^2};\ \sin.\text{M}''' = \frac{{}'x'''\rho''' + r'''.{}'y'''}{m'''^2}.$$

En supposant C'P' l'axe des abscisses, C' l'origine des coordonnées, nous trouverons l'équation suivante de la droite τ'

$$'u' = \frac{\tau'}{\sin. M'} + 't' \cot. M' \; ; \quad \ldots \ldots \quad (I)$$

en appelant $'t'$ l'abscisse, $'u'$ l'ordonnée.

Il ne sera pas difficile maintenant d'établir les équations de τ' rapportées aux trois axes X', Y', Z'. En effet, si nous en appelons t', u', ω', les coordonnées, nous trouverons :

$$t' = \sqrt{'u'^2 - \omega'^2}. \sin. \alpha' + 't' \cos. \alpha' ;$$

$$u' = \sqrt{'u'^2 - \omega'^2}. \cos. \alpha' - 't' \sin. \alpha' ;$$

or, des considérations élémentaires nous donnent :

$$\omega' = \frac{'u'z'}{'y'} ;$$

ce qui nous mène aux équations suivantes :

$$t' = \frac{'u' \sqrt{'y'^2 - z'^2}}{'y'}. \sin. \alpha' + 't' \cos. \alpha ;$$

$$u' = \frac{'u' \sqrt{'y'^2 - z'^2}}{'y'}. \cos. \alpha' - 't' \sin. \alpha' ; \quad \ldots \ldots \quad (II)$$

$$\omega' = \frac{'u'z'}{'y'}.$$

Pour le point M de la ligne τ', $'t'$ et $'u$ deviendront $'x'$ et $'y'$; t', u', ω', se changeront en $x'y'$, z' ; il en résultera :

$$x' = \sqrt{'y'^2 - z'^2}. \sin. \alpha' + 'x' \cos. \alpha' ;$$

$$y' = \sqrt{'y'^2 - z'^2}. \cos. \alpha' - 'x' \sin. \alpha' ;$$

d'où nous tirons

$$'x' = x' \cos.\alpha' - y' \sin.\alpha';$$

$$\sqrt{'y'^2 - z'^2} = x' \sin.\alpha' + y' \cos.\alpha'.$$

Les équations (II) en y substituant au lieu de $'u'$ sa valeur tirée de l'équation (I), deviendront en conséquence :

$$t' = \frac{r'(x' - 'x' \cos.\alpha')}{'y' \sin.M'} + \frac{x' \cos.M' + r' \cos.\alpha'}{'y' \sin.M'}\,'t';$$

$$u' = \frac{r'(y' + 'x' \sin.\alpha')}{'y' \sin.M'} + \frac{y' \cos.M' - r' \sin.\alpha'}{'y' \sin.M'}\,'t';$$

$$\omega' = \frac{r'z'}{'y' \sin.M'} + \frac{z'}{'y'}\frac{\cos.M}{\sin.M'}\,'t'.$$

Appelons à présent ξ', υ', ζ', les angles formés par τ' et les axes X, Y, Z; nous arriverons, au moyen de considérations très-usitées, aux équations suivantes :

$$\cos.\xi' = \frac{x' \cos.M' + r' \cos.\alpha'}{'y'};$$

$$\cos.\upsilon' = \frac{y' \cos.M' - r' \sin.\alpha'}{'y'};$$

$$\cos.\zeta' = \frac{z' \cos.M'}{'y'}.$$

Il n'a été question jusqu'à présent que des équations de la ligne τ'; mais il est très-aisé de voir que pour en déduire celles de τ'', τ''', on n'a qu'à y remplacer les accens à droite de r', α', x', y', $'y'$, cos. M', par les accens correspondans. Or, si l'on appelle ξ'', υ'', ζ'', les angles formés par τ'' et les axes X, Y, Z; ξ''', υ''', ζ''', ceux que fait τ''' avec ces axes, on aura :

$$\cos\xi'' = \frac{x'' \cos.M'' + r'' \cos.\alpha''}{'y''};\ \cos.\xi''' = \frac{x''' \cos.M''' + r''' \cos.\alpha'''}{'y'''};$$

$$\cos.\upsilon''=\frac{r''\cos.M''-r''\sin.\alpha''}{'y''};\ \cos.\upsilon'''=\frac{r'''\cos.M'''-r'''\sin.\alpha'''}{'y'''};$$

$$\cos.\zeta''=\frac{z''\cos.M''}{'y''};\ \cos.\zeta'''=\frac{z'''\cos.M'''}{'y'''}.$$

Les équations de ces neuf angles nous mettent à même de résoudre le problème. On avait demandé que τ' et τ''; τ' et τ'''; τ'' et τ''' fussent perpendiculaires entre elles; conditions qui sont exprimées analitiquement par les équations suivantes :

$$o=\cos.\xi'\cos.\xi''+\cos.\upsilon'\cos.\upsilon''+\cos.\zeta'\cos.\zeta''$$
$$o=\cos.\xi'\cos.\xi'''+\cos.\upsilon'\cos.\upsilon'''+\cos.\zeta'\cos.\zeta'''$$
$$o=\cos.\xi''\cos.\xi'''+\cos.\upsilon''\cos.\upsilon'''+\cos.\zeta''\cos.\zeta'''$$

En y remplaçant, cos. ξ', cos. ξ'', etc., par leurs valeurs, que nous venons de trouver, nous établirons :

$$o=(x'x''+y'y''+z'z'')\cos.M'\cos.M''+r'\cos.M''(x''\cos.\alpha'-y''\sin.\alpha')$$
$$+r''\cos.M'(x'\cos.\alpha''-y'\sin.\alpha'')+r'r''\cos.(\alpha'-\alpha'');$$
$$o=(x'x'''+y'y'''+z'z''')\cos.M'\cos.M'''+r'\cos.M'''(x'''\cos.\alpha'-y'''\sin.\alpha')$$
$$+r'''\cos.M'(x'\cos.\alpha'''-y'\sin.\alpha''')+r'r'''\cos.(\alpha'-\alpha''');$$
$$o=(x''x'''+y''y'''+z''z''')\cos.M''\cos.M'''+r''\cos.M'''(x'''\cos.\alpha''-y'''\sin.\alpha'')$$
$$+r'''\cos.M''(x''\cos.\alpha'''-y''\sin.\alpha''')+r''r'''\cos.(\alpha''-\alpha''').$$

En observant que cos. M′, cos. M″, cos. M‴, ne contiennent d'autres inconnues que x, y, z; α', α'', α''' ($'x'$, $'y'$, z', etc., étant des fonctions déterminées de x, y, z; α', α'', α'''), il n'y aura que six inconnues dans ces trois équations. Nous n'en pourrons déterminer que trois; il en restera autant, ce qui met en évidence que le problème est indéterminé, puisqu'il n'en devrait rester que deux pour que l'équation de la surface cherchée fût entièrement connue. Il faudra donc ajouter une condition, concernant ou la surface en question, ou les angles α', α'', α'''. On en peut imaginer une quantité infinie, ce qui donne lieu à autant de problèmes divers. Nous ne pous-

serons pas plus loin la solution générale de notre problème, et nous allons procéder à la solution du cas qui suppose les sphères S′, S″, S‴, concentriques. Dans ce cas nous aurons:

$$x'=x''=x'''\ (=x);\ y'=y''=y'''\ (=y);\ z'=z''=z'''\ (=z)$$
$$m'=m''=m'''=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\ (=m);$$
$$'x'\ =x\cos.\alpha'\ -y\sin.\alpha'\ ;\quad \rho'=\sqrt{m^2-r'^2};$$
$$'x''\ =x\cos.\alpha''\ -y\sin.\alpha''\ ;\quad \rho''=\sqrt{m^2-r''^2};$$
$$'x'''=x\cos.\alpha'''-y\sin.\alpha''';\quad \rho'''=\sqrt{m^2-r'''^2};$$

puis, en omettant les accens à gauche,

$$\cos.M'=\frac{y'\rho'-r'x'}{m^2};\cos.M''=\frac{y''\rho''-r''x''}{m^2};\cos.M'''=\frac{y'''\rho'''-r'''x'''}{m^2};$$

Les trois dernières équations de la solution générale deviendront en conséquence, en y faisant les substitutions nécessaires:

$$y'y''\rho'\rho''=r'r''\ [x'x''-m^2\cos.(\alpha'-\alpha'')]=r'r''R''';$$
$$y'y'''\rho'\rho'''=r'r'''\ [x'x'''-m^2\cos.(\alpha'-\alpha''')]=r'r'''R'';$$
$$y''y'''\rho''\rho'''=r''r'''\ [x''x'''-m^2\cos.(\alpha''-\alpha''')]=r''r'''R';$$

de là nous tirons,

$$y'^2\rho'^2=\frac{r'^2R''R'''}{R'};\quad y''^2\rho''^2=\frac{r''^2R'R'''}{R''};\quad y'''^2\rho'''^2=\frac{r'''^2R'R''}{R'''};$$

et puis

$$r'^2=\frac{m^2y'^2}{y'^2+\dfrac{R''R'''}{R'}};\ r''^2=\frac{m^2y''^2}{y''^2+\dfrac{R'R'''}{R''}};\ r'''^2=\frac{m^2}{y'''^2+\dfrac{R'R''}{R'''}};$$

en prenant la somme de ces trois équations, et en la divisant

par m^2, nous obtiendrons :

$$\frac{r'^2+r''^2+r'''^2}{m^2}=$$

$$\frac{y'^2\left(y''^2+\frac{R'R'''}{R''}\right)\left(y'''^2+\frac{R'R''}{R'''}\right)+y''^2\left(y'^2+\frac{R''R'''}{R'}\right)\left(y'''^2+\frac{R'R''}{R'''}\right)+y'''^2\left(y'^2+\frac{R''R'''}{R'}\right)\left(y''^2+\frac{R'R'''}{R''}\right)}{\left(y'^2+\frac{R''R'''}{R'}\right)\left(y''^2+\frac{R'R'''}{R''}\right)\left(y'''^2+\frac{R'R''}{R'''}\right)}.$$

En développant à part le numérateur et le dénominateur de cette fraction, on trouvera le premier égal à

$$2\times dénom.+y'^2y''^2y'''^2-(y'^2R'^2+y''^2R''^2+y'''^2R'''^2)-2R'R''R''';$$

en remplaçant dans les trois derniers termes de cette expression R′, R″, R‴ par leurs valeurs ; y'^2 par $m^2-x'^2$; y''^2 par $m^2-x''^2$; y'''^2 par $m^2-x'''^2$; on parviendra à la fin au résultat suivant :

$$y'^2y''^2y'''^2-(y'^2R'^2+y''^2R''^2+y'''^2R'''^2)-2R'R''R'''=o.$$

De là nous concluons enfin

$$\frac{r'^2+r''^2+r'''^2}{m^2}=2,\text{ ou bien } m^2=x^2+y^2+z^2=\frac{r'^2+r''^2+r'''^2}{2},$$

équation qui nous apprend (1) que la somme des carrés des coordonnées est constante, c'est-à-dire que la surface cherchée est une sphère; (2) que, l'origine des coordonnées ayant été prise au centre commun des sphères S′, S″, S‴, (puisque $x'=x''=x'''=x$, etc.; *voyez page préc.*) ce centre sera de même celui de la sphère cherchée, c'est-à-dire, qu'elle sera concentrique aux trois sphères données; (3) qu'en construisant un parallélipipède dont les rayons des sphères données soient les côtés, le carré de sa diagonale est égal à deux fois le carré du rayon de la sphère cherchée.

Il est intéressant de remarquer que dans la résolution de ce cas nous n'avons pas eu besoin de l'équation de condition mentionnée ci-dessus.

Nous n'ajouterons pas d'autres exemples à celui que nous

venons d'exposer. Il faudrait entrer dans des calculs trop compliqués, même en choisissant les conditions les plus simples, comme par exemple, que : *Les centres des sphères S', S'', S''', soient situés sur une même droite, de manière que le premier et le troisième soient à égale distance du second.* Nous finirons par donner une autre solution du cas proposé. En supposant connu que la surface en question est une sphère (chose qui a été prouvée dans les premières lignes de cet article), nous demanderons quel en sera le rayon. A cet effet, nous nous servirons du lemme suivant :

Soient T', T'', T''', trois axes rectangulaires se coupant au point M. Qu'on les coupe par un plan quelconque et qu'on appelle τ', τ'', τ''' les portions de T', T'', T''', terminées d'un côté par ce plan et de l'autre par M; qu'on abaisse enfin une perpendiculaire de M sur ce plan, et qu'on l'appelle *m;* on trouvera :

$$m^2 = \frac{\tau'^2\tau''^2\tau'''^2}{\tau'^2\tau''^2 + \tau'^2\tau'''^2 + \tau''^2\tau'''^2};$$

ou bien

$$\frac{1}{m^2} = \frac{1}{\tau'^2} + \frac{1}{\tau''^2} + \frac{1}{\tau'''^2}.$$

Soit à présent M un point de la sphère dont on cherche le rayon, qu'on le joigne par une droite MC ($= m$) à C (le centre commun des sphères données), et qu'on mène par C un plan perpendiculaire à MC. Ce plan divisera S', S'', S''', en des hémisphères. En appelant enfin τ', τ'', τ''', les portions prises entre M et le plan perpendiculaire des droites qui, partant du point M, sont en même-temps tangentes à S', S'', S''', et perpendiculaires entre elles, nous aurons suivant le lemme :

$$\frac{1}{m^2} = \frac{1}{\tau'^2} + \frac{1}{\tau''^2} + \frac{1}{\tau'''^2};$$

or, on trouve très-facilement

$$\tau'^2 = \frac{m^4}{m^2 - r'^2};\ \tau''^2 = \frac{m^4}{m^2 - r''^2};\ \tau'''^2 = \frac{m^4}{m^2 - r'''^2};$$

nous en tirons

$$\frac{1}{m^2}=\frac{m^2-r'^2}{m^4}+\frac{m^2-r''^2}{m^4}+\frac{m^2-r'''^2}{m^4};$$

ce qui produit

$$m^2=\frac{r'^2+r''^2+r'''^2}{2}$$

résultat identique avec celui que nous avions déjà trouvé.

Démonstration géométrique des propriétés de la courbe d'intersection d'une sphère et d'un cône de révolution dont le sommet est en un point de la sphère; par M. Chasles, ancien élève de l'École Polytechnique. (Voy. le 6ᵉ numéro du IVᵉ vol. de la *Correspondance mathématique*, pag. 355.)

Les propriétés de la courbe en question que M. le docteur *Reiss* a déduites très-facilement de quelques formules d'analise, sont fort intéressantes par leur élégance, par leur analogie avec les propriétés des sections planes d'un cône de révolution, déjà exposées par M. *Quetelet*, et aussi parce que cette courbe est du quatrième degré, et que l'on connaît encore bien peu de choses relativement aux courbes à double courbure des troisième et quatrième degrés.

Par ces différentes raisons, j'ai pensé qu'il pourrait ne pas paraître superflu de faire voir que les élégantes propositions de M. le docteur *Reiss*, peuvent se déduire aussi de quelques considérations de géométrie.

1. Soient O le sommet du cône et X le point où son axe de révolution perce la sphère. Par cet axe, menons un plan quelconque qui coupera la sphère suivant un cercle Σ, dont le centre est en C, et le cône suivant deux arêtes OA, OB (*fig.* 4). Les points A, B, où ces arêtes rencontrent le cercle, appartiennent à la courbe en question, et $\overline{AB}$ est un diamètre de cette courbe

2. Démontrons d'abord que la somme des deux *rayons vecteurs* $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, est constante, quel que soit le plan mené par l'axe OX.

Du point X abaissons des perpendiculaires $\overline{Xa}$, $\overline{Xb}$, par les deux droites OA, OB; elles sont égales parce que l'axe OX, fait des angles égaux avec les deux arêtes du cône OA, OB: les cordes $\overline{XA}$, $\overline{XB}$ sont égales comme soutenant des arcs égaux; il s'ensuit que les deux triangles XA*a*, XB*b* sont égaux, et conséquemment que les deux côtés $\overline{Aa}$, $\overline{Bb}$ sont égaux. On a donc $\overline{OA} + \overline{OB} = \overline{Oa} + \overline{Ob} = 2\overline{Oa}$; or, $\overline{Oa}$ est la projection de l'axe $\overline{OX}$ du cône sur une arête, $\overline{Oa}$ est donc constante, et l'on a ce théorème;

La somme des deux rayons vecteurs menés aux extrémités d'un diamètre *de la* courbe *est constante.*

3. Soient a', b' et m les projections orthogonales des points A, B, et du milieu M du diamètre $\overline{AB}$ par l'axe OX; soit α l'angle que chaque arête du cône fait avec l'axe OX, on aura

$$\overline{Oa'} = \overline{OA}\cos.\alpha;\ \overline{Ob'} = \overline{OB}\cos.\alpha;\ \overline{Om} = \frac{1}{2}(\overline{Oa'} + \overline{Ob'}) = \frac{1}{2}(\overline{OA} + \overline{OB})\cos.\alpha = \text{const.};\ \text{donc}$$

Les milieux de tous les diamètres de la courbe sont dans un même plan perpendiculaire à l'axe du cône.

4. La droite XM passe par le centre C du cercle Σ; or, on sait que quand un plan tourne autour d'une corde d'une sphère, les cercles suivant lesquels il coupe la sphère ont leurs centres sur un cercle situé dans le plan normal à la corde mené par son milieu, et ce cercle passe par ce point milieu de la corde; donc la droite XM est la génératrice d'un cône du second degré, dont la section, par un plan perpendiculaire à l'axe OX, est un cercle qui passe par un point de cet axe, donc:

Les milieux de tous les diamètres de la courbe sont sur un cercle.

5. On a dans le triangle ABC qui a pour base le diamètre $\overline{AB}$, et pour sommet le centre C du cercle Σ,

$$\overline{AB}^2 = 2\overline{AC}^2 - 2\overline{AC}^2\cos.C = 2\overline{AC}^2(1 - \cos.C);$$

or l'angle $C = \widehat{ABC}$ est double de l'angle $\widehat{AOB} = 2\alpha$, on a donc

$$\overline{AB}^2 = \overline{2AC}^2\ (1 - \cos.\ 4\alpha) = 2R^2\ (1 - \cos.\ 4\alpha),$$

en désignant par R le rayon $\overline{CA}$ du cercle Σ. Soit $\overline{A'B'}$ le diamètre de la *courbe* compris dans un plan perpendiculaire au plan du diamètre $\overline{AB}$, et R' le rayon du cercle suivant lequel ce nouveau plan coupe la sphère, on aura $\overline{A'B'}^2 = 2R'^2\ (1 - \cos.\ 4\alpha)$; donc $AB^2 + \overline{A'B'}^2 = 2\ (R^2 + R^{2\prime})\ (1 - \cos.\ 4\alpha)$. Mais on sait que quand on mène arbitrairement par une corde d'une sphère deux plans rectangulaires, la somme des carrés des rayons des cercles suivant lesquels ils coupent la sphère est constante (*Géométrie de position* de *Carnot*, p. 166), on a donc $R^2 + R'^2 =$const., et par conséquent $\overline{AB}^2 + \overline{A'B'}^2 =$ const.; donc

La somme des carrés de deux diamètres à plans rectangulaires est constante.

6. Soit θ l'angle que le diamètre OD du cercle Σ fait avec l'axe OX; on a $\overline{OA} = \overline{OD} = \cos\ (\theta + \alpha) = 2R\cos.\ (\theta + \alpha)$; $\overline{OB} = \overline{OD}.\ \cos.\ (\theta - \alpha) = 2R\ \cos.\ (\theta - \alpha)$; d'où $\overline{OA}.\ \overline{OB} = 4R^2 \times \cos.\ (\theta + \alpha).\ \cos.\ (\theta - \alpha) = 2R^2\ (\cos.\ 2\theta + \cos.\ 2\alpha) = 2R^2\ (2\cos.^2\ \theta - 1 + \cos.\ 2\alpha) = 4R^2\ \cos.^2\ \theta + 2R^2\ (\cos.\ 2\alpha - 1)$.

Or, on a $\quad \overline{OX} = \overline{OD}\cos.\ \theta = 2R\cos.\ \theta,$

donc $\quad \overline{OA}.\ \overline{OB} = \overline{OX}^2 + 2R^2\ (\cos.\ 2\alpha - 1).$

Soit $\overline{A'B'}$ le diamètre de la courbe compris dans un plan perpendiculaire à celui de la figure, et R' le rayon du cercle suivant lequel ce plan coupe la sphère, on aura pareillement

$$\overline{OA'}.\ \overline{OB'} = \overline{OX}^2 + 2R'^2\ (\cos.\ 2\alpha - 1);$$

$(R^2 + R'^2)$ est une quantité constante (5), on a donc

$$\overline{OA}.\ \overline{OB} + \overline{OA'}.\ \overline{OB'} = \text{const.};$$

et, multipliant par sin. 2α = sinus de l'angle compris entre deux arêtes du cône qui aboutissent aux extrémités d'un diamètre de la courbe, on conclut ce théorème ;

La somme des aires des deux triangles qui ont respectivement pour bases deux diamètres à plans rectangulaires, et pour sommet commun le sommet du cône, est constante.

7. On a dans les triangles OAB, OA'B',

$$\overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 = \overline{AB}^2 + 2\overline{OA}.\overline{OB} \cos. 2\alpha,$$
$$\overline{OA'}^2 + \overline{OB'}^2 = \overline{A'B'}^2 + 2\overline{OA'}.\overline{OB'} \cos. 2\alpha.$$

Ajoutant membre à membre, observant que $\overline{AB}^2 + \overline{A'B'}^2$ = const. (5) et $\overline{OA}.\overline{OB} + \overline{OA'}.\overline{OB'}$ = const. (6), on en conclut que :

La somme des carrés des rayons vecteurs menés aux extrémités de deux diamètres à plans rectangulaires est constante.

Tels sont les six théorèmes donnés par M. le docteur *Reiss* sur la courbe de pénétration d'une sphère et d'un cône de révolution dont le sommet est un point de la sphère.

Quelques remarques sur le problème résolu à la page 296, *du tome IV de la Correspondance;* par M. Heichen, candidat à l'Université de Louvain.

1° $f = f(x, y, a, b) = o$ étant l'équation de la droite, et $\varphi(a, b) = \varphi = o$ exprimant la relation qui existe entre les quantités a et b, on substituera dans $f = o$ la valeur de b tirée de $\varphi = o$, cela donnera : $f(x, y, a, \Psi a) = o$. Différenciant cette dernière équation par rapport à la constante a, on obtient $\frac{df(x, y, a, \Psi a)}{da} = o$: substituant dans $(x, y, a, \Psi a) = o$ la valeur de a donnée par $\frac{df}{da} = o$, on obtient l'équation $F(x, y) = o$ de la courbe cherchée.

2° Voici l'inverse de la question dont il s'agit :

Étant données les équations respectives d'une courbe et d'une droite, on demande la relation qui doit exister entre les constantes a *et* b *qui entrent dans l'équation de la droite pour que*

celle-ci reste, dans toutes les positions qu'elle peut prendre, tangente à la courbe ?

Soient : $F(x, y, A, B) = F = o$ et $f(x, y, a, b) = f = o$

les équations de la courbe et de la droite données. Différencions ces deux équations et éliminant entre les résultats le coefficient différentiel $\frac{dy}{dx}$, on obtient une troisième relation :

$$\varphi(x, y, A, B, a, b) = \varphi = o;$$

éliminant de celle-ci les variables x, y, au moyen de $F = o$, $f = o$, on obtient une nouvelle formule :

$$\Psi(A, B, a, b) = \Psi = o$$

ne renfermant plus que des constantes. Si l'on donne successivement à a des valeurs différentes, l'équation $\Psi = o$, donnera les valeurs correspondantes de b. Substituant dans $f = o$ chaque couple de valeurs de a et b, l'équation $f = o$ deviendra, en vertu de chaque substitution, celle d'une droite particulière; chacune de ces droites touchera la courbe $F = o$, parce que dès le commencement nous avons supposé le coefficient différentiel $\frac{dy}{dx}$, le même dans $F = o$ et dans $f = o$. Ce que nous venons de dire sur les constantes a et b, se dirait également de A et B, c'est-à-dire qu'on pourrait regarder dans $\Psi = o$, a et b comme des constantes, et A et B comme variables. Cela reviendrait à supposer la courbe donnée $F = o$ mobile, et à trouver la loi suivant laquelle elle devrait se mouvoir pour rester constamment tangente à une droite donnée de position $f = o$.

Mais toutes ces questions rentrent dans la théorie des solutions particulières, que *Lagrange* a si lumineusement exposées dans ses écrits analitiques, qu'il ne reste plus aucune difficulté sur cette matière.

Réponse à la question II, énoncée à la page 348, du IV[e] vol. de la *Correspondance*; par le même.

Trouver l'équation de la surface touchée constamment par un plan rectangulaire qui glisse le long d'un axe sur un plan perpendiculaire à cet axe, de manière que la perpendiculaire abaissée sur l'intersection des deux plans au point où le plan mobile s'appuie sur l'arc, conserve une longueur constante et égale à D.

Ce problème est analogue à celui résolu par M. *Le François*, et sur lequel nous venons de faire nos observations; nous tâcherons par conséquent de le résoudre suivant une méthode pareille. Soit pour cela l'ordonnée zo l'axe donné; le plan fixe est donc celui des xy (*fig.* 5). Soit pq la trace du plan mobile sur le plan fixe, et C le point d'intersection du premier avec l'axe. Désignons par α, β les coordonnées du point P où la perpendiculaire CP $=$ D rencontre la droite pq, nous aurons ainsi :

$$\alpha^2 + \beta^2 + \text{Co}^2 = \text{D}^2 \ (1).$$

L'équation du plan étant :

$$z = ax + by + \text{Co}.$$

Celle de la trace sur celui des yx sera :

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{\text{Co}}{b} \qquad \text{d'où} \qquad \beta = -\frac{a}{b}\alpha - \frac{\text{Co}}{b}.$$

Celle de la perpendiculaire oP sur pq donnera :

$$\beta = \frac{b}{a}\alpha,$$

d'où résulte en vertu de (1) la valeur suivante pour Co :

$$Co = \pm D \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{1 + a^2 + b^2}}.$$

Et l'équation du plan devient :

$$z = ax + by \pm D \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{1 + a + b}}. \qquad (\alpha)$$

Les quantités a, b, sont constantes pour une même position du plan, et variables en passant d'une de ces positions à la suivante. D'un autre côté, il est évident qu'on peut regarder la surface touchée comme formée par les intersections consécutives et infiniment voisines des diverses positions du plan. Donc en passant d'une de ces positions à la suivante, les coordonnées z, y, x, restent constantes, et il n'y a de variables que les quantités a et b qui deviennent l'une $a + da$ et l'autre $b + db$, cela donne :

$$z = (a+da)x + (b+db)y \pm D \sqrt{\frac{(a+da)^2 + b+db)^2}{1 + (a+da)^2 + (b+db)^2}} (\alpha'),$$

Le système des deux équations (α) (α') convient nécessairement à l'intersection des deux positions consécutives du plan. Donc en retranchant l'une de ces équations de l'autre, le résultat sera l'équation de cette intersection, ce qui donne :

$$(\alpha'') \ldots\ldots xda + ydb \pm D \sqrt{\frac{(a+da)^2 + (b+db)^2}{1 + (a+da)^2 + (b+bd)^2}},$$

$$\mp D \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{1 + a^2 + b^2}} = o.$$

La quantité b variant avec a, en est nécessairement une fonction, ainsi on peut faire $b = \varphi a$, φ désignant la forme d'une

fonction indéterminée. Portant cette valeurde b dans (α'') on obtient une équation en x, y, a et b, qui appartient encore à l'intersection de deux positions consécutives du plan mobile; éliminant de cette dernière au moyen de l'équation (α) la variable a, l'équation résultante pourra être représentée par

$$F(x, y, z, D) = o,$$

et conviendra au lieu géométrique de toutes les intersections du plan mobile; cette équation sera donc celle de la surface touchée constamment par ce plan. Mais l'élimination que nous venons d'indiquer est en général impossible, à cause de l'indéterminée $\varphi a = b$. On pourrait appliquer ces considérations générales à des cas particuliers où l'on se donnerait la forme de la fonction φa.

Mémoire sur les propriétés des hyperboles et des paraboles, considérées comme le lieu des pôles d'un cercle mobile et variable de rayon, assujetti à passer par un point fixe, et dont le centre se meut en ligne droite (*). *Par* THÉODORE OLIVIER, *ancien élève de l'École Polytechnique.*

Étant donnés un cercle γ et deux droites A et B, situés sur un plan, trouver la courbe, lieu des pôles, *d'un cercle mobile δ, dont le centre se meut sur la droite B; le cercle δ étant, dans ses diverses positions, tangent au cercle γ, et ayant la droite A pour* polaire commune (*fig.* 6).

Solution. Par le centre o' du cercle fixe γ, je mène $o'C$ per-

---

(*) Ce problème a été résolu pour plusieurs cas particuliers par MM. *Olivier*, *Bobillier* et *Quetelet*, dans le *vol. précédent;* M. *Bobillier* en a déduit plusieurs corollaires intéressans. A. Q.

pendiculaire à la droite A. Le point o sera l'origine des coordonnées, A l'axe des y et oC celui des x.

Par le centre o'' du cercle mobile δ, je mène o''M parallèle à oC.

Ensuite, menant du point M une tangente Mn au cercle δ, et du point de contact n abaissant sur Mo'' la perpendiculaire np, le point p sera le *pôle* de la droite A par rapport au cercle δ. Ce point p sera donc un des points de la courbe cherchée.

Les coordonnées du point p seront pp' et op'. Le triangle rectangle o''Mn donne

$$\overline{o''n}^2 = o''\text{M}.\, o''p \qquad (1)$$

mais $$o''\text{M} = \text{M}p + o''p = x + o''p$$

Joignant les centres des cercles δ et γ, et désignant par R le rayon du cercle γ, l'on aura : $o''n = o''m = o'o'' - \text{R}$. Le triangle rectangle $o'o''$N donne, en désignant par a la distance oo';

$$\overline{o'o''}^2 = \overline{o''\text{N}}^2 + \overline{o'\text{N}}^2 = y^2 + \overline{(x - a + o''p)}^2.$$

substituant dans l'équation (1) les valeurs de o''M et de $o''n$, l'on aura :

$$\left[\sqrt{y^2 + (x - a + o''p)^2} - \text{R}\right]^2 = o''p\,(x + o''p) \quad (2).$$

Les deux triangles rectangles $o''pg$ et CNo'' donnent, en désignant par m la tangente trigonométrique de l'angle α, et par b la distance o'C,

$$\frac{\text{NC}}{o''\text{N}} = \frac{o''p}{pg} = m = \frac{b + a - x - o''p}{y}$$

d'où l'on tire $o''p = a + b - x - my$, valeur qui, substituée dans l'équation (2), donne

$$\left[\sqrt{y^2 + (b - my)^2} - \text{R}\right]^2 = (a + b - x - my)\,(a + b - my) \quad (3).$$

pour l'équation de la courbe lieu des *pôles*.

Si l'on suppose que $R = o$, c'est-à-dire, que le cercle mobile δ passe dans ses diverses positions, par le point fixe o', l'équation (3) se réduit à :

$$y^2 - mxy + 2amy + (a + b)\,x - (a^2 + 2ab) = o \quad (4),$$

qui appartient à une section conique.

L'on peut démontrer que *cette équation est celle d'une hyperbole*, sans avoir besoin de la discuter; il suffit de faire voir que la droite C'D parallèle à oC, et passant par le point où les deux droites B et A se coupent, est une asymptote.

Et en effet, si du point C' intersection des deux droites A et B, comme centre, je décris un cercle δ' avec le rayon C'o', la droite A sera un diamètre de δ', et son *pôle* par rapport à δ' sera situé à l'infini sur la droite C'D.

Si je prends sur B, à partir du point C', des points h, h', h'', etc., qui vont en s'éloignant successivement de C', et si je décris des cercles ayant ces points pour centres et pour rayons les droites ho', $h'o'$, $h''o'$, etc., la droite A deviendra pour chaque position du cercle mobile, une corde qui s'éloignera du centre du cercle mobile, à mesure que ce centre s'éloignera du point C'; et le *pôle* de A, par rapport au cercle mobile, se rapprochera au contraire de la droite A.

Ainsi, en supposant que l'origine des coordonnées fût transportée au point C', l'on voit que les ordonnées croissent à mesure que les abscisses diminuent, et que lorsque l'abscisse est infinie, l'ordonnée est nulle, tandis que lorsque l'abscisse est nulle, l'ordonnée est une quantité finie et correspondante aux deux points q et q' situés sur A, et tels que $qh''' = h'''o'$ et que $q'h^{\text{iv}} = h^{\text{iv}}o'$, c'est-à-dire, correspondans aux deux points où le cercle mobile est tangent à la *polaire commune* A.

Ainsi la ligne C'D est une assymptote de la section conique représentée par l'équation (4); donc, etc.

Il est facile de démontrer que *la droite B est perpendiculaire à la seconde asymptote de la courbe lieu des* pôles, et que par conséquent *l'angle α est celui que les deux asymptotes comprennent entre elles.*

En effet, si par le point o' je mène la droite $o'G$ parallèle à B, et la droite $o'H$ perpendiculaire à B, cette dernière sera le cercle mobile dont le centre est situé à l'infini sur B.

Le *pôle* du cercle $o'H$ de rayon infini, pris par rapport à la *polaire* A, sera évidemment situé sur la droite $o'H$ et à l'infini; car pour déterminer ce *pôle*, il faudrait du point q'', intersection du cercle $o'H$ de rayon infini et de la *polaire* A, mener une tangente à ce cercle; cette tangente, qui n'est autre que $o'H$, irait couper la perpendiculaire à A, menée par le centre du cercle $o'H$, situé à l'infini sur B, en un point qui serait le *pôle* demandé.

La droite $o'H$ sera donc parallèle à la seconde asymptote, donc, etc.

Si l'on suppose que $a = o$, alors le point fixe est situé sur la *polaire commune* A. Par cette supposition, l'équation (4) se réduit à :

$$y^2 - mxy + bx = o \;\ldots\ldots\; (5).$$

Ainsi le point fixe est situé dans ce cas sur la courbe lieu des *pôles*.

L'on peut démontrer comme précédemment :

1° Que la droite qui passe par le point d'intersection des deux droites A et B, et qui est perpendiculaire à la *polaire commune* A, est une asymptote de la courbe.

2° Que l'angle α compris entre les deux droites A et B, est celui des deux asymptotes.

Ainsi l'équation (5) appartient à une hyperbole.

Il est facile de démontrer que dans ce cas la *polaire* A est tangente à la courbe.

En effet (*fig.* 7), si du point fixe o, l'on abaisse une perpendiculaire oH, sur la droite B, le cercle qui aura son centre en H et pour rayon oH, sera tangent à la *polaire* A au point o; et tous les autres cercles qui auront leurs centres sur B et qui passeront par le point fixe o, couperont la droite A.

Par conséquent tous les *pôles* des diverses positions du cercle mobile, par rapport à la *polaire* A, seront situés dans l'angle

AC'D, ou dans l'angle A'C'D'; le point o étant le seul *pôle* qui soit situé sur la droite A; donc, etc.

Ce qui précède donne la solution des problèmes suivans :

1° *Construire une hyperbole ayant pour asymptote une droite C'D; pour tangente au point* o, *une droite A perpendiculaire à l'asymptote C'D; et passant par le point p', situé dans l'angle AC'D, ou par le point p^{IV}, situé dans l'angle opposé par le sommet D'C'A'.*

Solution. L'on construira le triangle $oh'p'$ ou $oh^{IV}p^{IV}$, rectangle en o, et ayant son hypothénuse parallèle à l'asymptote C'D.

L'on joindra le point C', intersection de la droite A et de l'asymptote C'D, avec le point h' ou h^{IV}, et la droite C'B sera la ligne des centres du cercle mobile.

Si du point o l'on mène des droites oh, oh'', oh''', etc., et leurs perpendiculaires op, op'', op''', etc., la droite hp parallèle à C'D coupera op en un point p, qui appartiendra à l'hyperbole demandée : les points p'', p''', etc., obtenus par une construction semblable, seront aussi sur la courbe.

2° *Construire une hyperbole, passant par deux points p et p', situés du même côté, ou p et p^{IV}, situés de côtés différens, par rapport à la droite A, ayant pour tangente au point* o *cette droite A, et pour asymptote une perpendiculaire à la droite A.*

Solution. L'on construira les deux triangles $oh'p'$ et ohp, ou $oh'p'$ et $oh^{IV}p^{IV}$, rectangles en o, et ayant leurs hypothénuses perpendiculaires à la droite A. Joignant les points h et h' ou h' et h^{IV}, l'on aura la droite BB', lignes des centres du cercle mobile, qui coupera la droite A au point C'. Menant par le point C' la droite C'D perpendiculaire à la droite A, l'on aura l'asymptote de la courbe cherchée. Les divers points de l'hyperbole s'obtiendront par la construction du problème, n° 1.

Je me contenterai d'énoncer les deux problèmes suivans :

3° *Construire une hyperbole ayant pour tangente au point* o *une droite A; pour asymptote une droite C'D, perpendiculaire à la droite A, et dont les deux asymptotes comprennent entre elles un angle α plus petit qu'un droit.*

4° *Construire une hyperbole, passant par un point p'; ayant*

pour tangente au point o, *une droite A; pour l'une de ses asymptotes une perpendiculaire à la droite A, et dont les deux asymptotes comprennent entre elles un angle* α *plus petit qu'un droit.*

(*Fig.* 6.) Si l'on suppose que $b = o$, alors l'équation (4) se réduit à :

$$y^2 - mxy + 2may + a(x - a) = o.$$

La droite B, ligne des centres du cercle mobile, passe alors par le point fixe.

Si l'on transporte l'origine des coordonnées en ce point, en faisant $x' = x - a$, l'équation de l'hyperbole lieu des *pôles* sera :

$$y^2 - mx'y + may + ax' = o \quad (6).$$

Ainsi cette courbe passe par le point fixe.

Il est facile de démontrer que dans ce cas la droite B est tangente à la courbe lieu des *pôles*, et que le point de contact n'est autre que le point fixe.

En effet, à mesure que le centre du cercle mobile se rapprochera du point fixe, le rayon de ce cercle diminuera, et son *pôle*, par rapport à la *polaire* A, se rapprochera de la droite B; et lorsque le rayon du cercle mobile sera seul, le *pôle* et le centre de ce cercle se confondront avec le point fixe.

Si l'on considère deux positions du cercle mobile, que je désigne par δ' et δ'', le centre de δ' étant sur la droite B, à droite du point fixe, et celui de δ'' étant à gauche, il est évident que le *pôle* de δ' et celui de δ'' par rapport à la *polaire* A, seront situés du même côté, par rapport à B, et ne pourront être situés sur B, qu'autant que le cercle mobile aurait un rayon nul. Donc, etc.

Remarquons : 1° que, le mode de construction des points de la courbe lieu des *pôles*, montre que quelle que soit la position du point fixe, par rapport aux droites A et B, cette courbe ne peut jamais couper la droite B, ligne des centres du cercle mobile.

2° Que tant que le point fixe n'est pas situé sur la droite B, il existe toujours un second point fixe, par lequel passent les

diverses positions du cercle mobile; ces deux points fixes étant sur une perpendiculaire à la droite B, l'un à droite et l'autre à gauche, et également distans de B.

Ce qui précède donne la solution des problèmes suivans, que je me contenterai d'énoncer.

(Fig. 7.) 1° *Étant donné un angle obtus BC′D, et sur l'un de ses côtés C′B, un point* h′; *construire une hyperbole tangente à C′B au point* h′, *et ayant C′D pour asymptote.*

2° *Étant donné un angle obtus BC′D, un point* p *arbitraire, et un point* h′, *situé sur le côté BC′; construire une hyperbole passant par le point* p, *tangente à BC′ au point* h′, *et ayant l'une de ses asymptotes parallèle à C′D.*

Et l'on remarquera que la construction de l'hyperbole ne sera possible que lorsque ph parallèle à C′D sera $>$ ou $=$ hh'.

Dans les deux problèmes précédens, l'angle des deux asymptotes de l'hyperbole est implicitement donné, car il est égal au complément de l'angle obtus BC′D.

(*Fig.* 6.) Si je suppose que les deux droites B et A sont parallèles, alors l'angle α étant nul, sa tangente trigonométrique $m = o$. Par cette supposition l'équation (4) se réduit à :

$$y^2 + (a + b)\,x - a\,(a + 2b) = o \quad (7),$$

qui appartient à une parabole.

Si $a = o$ l'équation (7) devient :

$$y^2 + bx = o \quad (8)$$

qui appartient à une parabole, dont le sommet est le point fixe; la *polaire commune* est tangente au sommet et la droite BC, ligne des centres du cercle mobile, ne coupe pas la courbe et est distante du sommet d'une quantité égale au paramètre.

Si $b = o$, l'équation (7) devient :

$$y^2 + ax = a^2 \ldots\ldots (9),$$

qui appartient à une parabole dont le sommet est le point fixe. La *polaire commune* coupe la courbe, la droite ligne des centres du cercle mobile est tangente au sommet, et ces deux droites sont distantes entre elles d'une quantité égale au paramètre.

Description de plusieurs observatoires d'Angleterre (2e *article*) (1).

OBSERVATOIRE D'OXFORD.

Ce monument est situé au Nord-Ouest de la ville, sur un beau terrain qui a été donné par le duc de Marlborough, descendant du célèbre général de ce nom. L'observatoire proprement dit a été construit de 1772 à 1774, par *Keen* et *Wyat*, au moyen d'un legs considérable du docteur *John Radcliffe ;* on estime que les constructions seules ont coûté plus de 700,000 francs (2). Le bâtiment présente une forme symétrique ; il se compose d'un pavillon central et de deux ailes qui contiennent les salles d'observation ; la partie centrale est surmontée d'une lanterne octogone construite sur le modèle de la tour *des Vents*, à Athènes. Le globe placé au haut de l'observatoire est élevé d'environ 110 pieds au-dessus du sol; la longueur totale du bâtiment est de 175 pieds, et sa plus grande largeur de 57 ; la largeur des ailes est de 20 à 21 pieds seulement.

Il existe deux dessins gravés de l'observatoire d'Oxford, qui représentent la façade méridionale ; la vue que nous donnons ici a été prise du côté du Nord. Le plan a été revu par le directeur actuel de l'observatoire, M. le docteur *Rigaud*, qui a eu l'obligeance de me communiquer encore les renseignemens principaux que contient cette notice.

La partie extrême de l'aile orientale du bâtiment communique, comme l'indique le plan, avec la demeure de l'astronome. La première salle contient deux quarts de cercles muraux de 8 pieds de rayon qui ont été construits par *Bird*, et qui sont fixés aux deux faces d'un grand pilier en pierre *a*, de 8 pieds 3/4 de longueur sur 2 pieds 2 pouces de largeur. Près de ces quarts de cercles se trouvent une pendule de *Shelton*, et quelques

(1) Le premier article a paru dans le vol. précédent, page 313. Voyez aussi pour les observatoires d'Allemagne, le vol. III.

(2) Voyez les notices de M. *Gautier*. (*Bibl. universelle*, 1824.)

instrumens météorologiques. Cette salle a, dans le sens du Nord au Sud, 19 pieds 3/4 de largeur et 16 1/2 de l'Est à l'Ouest.

La salle voisine, qui est entourée d'un double escalier en forme d'estrade, contient un secteur zénithal de 15°, dont la lunette a 12 pieds. C'est dans la troisième salle que se trouve la lunette méridienne qui a 8 pieds de longueur et 3 pouces 1/2 de diamètre; ces deux derniers instrumens ont été également construits par *Bird* (1). Cette troisième salle est exactement de même dimension que la première. Les piliers qui portent les instrumens, n'ont point de liaison avec les murs extérieurs et descendent à environ huit pieds au-dessous du sol; ceux qui portent la lunette méridienne ont 2 pieds 2 pouces et 2 pieds 10 pouces de côté. Les ouvertures pratiquées dans les murs et les toits, pour l'observation dans le sens du méridien, paraissent être beaucoup trop étroites. Il arrive en effet généralement que la température de l'air extérieur n'est pas égale à celle de l'air intérieur; les courans qui s'établissent alors doivent produire nécessairement dans l'air des mouvemens ondulatoires qui ne peuvent être que préjudiciables à l'observation.

Le reste du bâtiment est divisé de la manière suivante :

d. Bibliothéque; elle a 23 pieds de longueur sur 15 de largeur. M. *Rigaud* m'y a montré une édition curieuse des logarithmes de *Briggs*, en ce qu'elle contient une chiliade de plus que les éditions ordinaires qui n'ont généralement que cent chiliades.

e. Grande salle de forme octogone; ses côtés ont 17 et 8 pieds de longueur. Elle communique, d'une part avec les jardins, au moyen d'une grande porte garnie d'un péristyle; et de l'autre, elle conduit aux étages supérieurs, par un escalier tournant placé en *f.* Quatre portes latérales établissent aussi des

---

(1) « On y (dans l'*Observatoire*) a placé deux muraux de 8 pieds, faits par *Bird*, en 1772, et qui ont coûté 800 guinées; un secteur de 12 pieds, de 200 guinées; un secteur équatorial du même prix; un instrument des passages de 150 guinées, dont l'axe a 4 pieds et la lunette 10. » (*Histoire des Mathém.*) Montucla, tome IV, page 351.

communications avec la bibliothéque, les deux cabinets voisins de l'escalier et la chambre demi-circulaire *g*. Cette dernière chambre et le cabinet voisin sont occupés par l'assistant.

h. Salle d'observation au milieu de laquelle se trouve un pilier pour un quart de cercle de *Bird* de 2 pieds 9 pouces de rayon.

i. Autre salle d'observation qui contient un instrument des passages de *Bird*, dont la lunette a quatre pieds de longueur.

La seconde aile du bâtiment est divisée exactement comme la première. Les murs des salles d'observation ont deux pieds d'épaisseur ; ceux des salles demi-circulaires deux pieds et demi ; et ceux de la tour centrale ont jusqu'à quatre pieds.

Le premier étage du pavillon est divisé à peu près de la même manière que le rez-de-chaussée. Le salon du milieu et les deux chambres adjacentes semblent avoir été destinées à servir de lieu pour des conférences ou d'amphithéâtre pour des leçons.

La lanterne qui se trouve au second, est à l'intérieur d'une forme très-élégante ; elle présente une grande salle octogone dont la partie supérieure est entourée d'une galerie ; on y voit plusieurs télescopes réflecteurs et quelques lunettes que l'on peut sortir sur la plateforme de l'observatoire. Parmi ces instrumens, il s'en trouvé un destiné à observer commodément au zénith ; il a été construit par ordre de M. *A. Robertson* prédécesseur du directeur actuel, et a coûté près de 1000 livres sterling, quoiqu'on n'en ait pu faire aucun usage.

La construction de l'observatoire n'a pas permis d'y placer l'équatorial ; on a dû établir tout exprès un pavillon dans le jardin, pour cet instrument, qui est le dernier ouvrage de *Bird*, et qui n'a pû même être entièrement achevé par cet artiste distingué. L'axe de l'équatorial est tout simplement un gros barreau de fer équarri ; les différentes parties de l'instrument sont de médiocre dimension. Le toit mobile présente une surface réglée qui peut être considérée comme engendrée par une droite qui glisse d'un mouvement continu et uniforme sur une circonférence qui sert de base au toit, et sur l'ouverture par laquelle on veut observer.

L'observatoire d'Oxford fut long-temps dirigé par le doc-

teur *Hornsby*, connu par la publication des observations de *Bradley*, que les parens de ce célèbre astronome avoient données à la bibliothéque de la ville (1). Il fut aussi dirigé par M. *Abram Robertson*, dont nous avons parlé précédemment, et dont le successeur, dans ces derniers temps, a été M. le docteur *Rigaud*, qui dirigeait précédemment l'observatoire de Richemond.

On ne peut dire que l'observatoire d'Oxford mérite d'être pris pour modèle dans son genre, puisqu'il est impossible d'y placer l'équatorial, instrument de première nécessité; cependant les salles d'observation, pour les instrumens méridiens, sont commodément distribuées, et l'édifice n'est point dépourvu d'une certaine élégance. Les ouvertures dans le sens du méridien sont trop étroites, comme l'observation en a déjà été faite; l'absence d'une demeure convenable pour le directeur a nécessité aussi la construction d'un nouveau bâtiment dans le voisinage.

Tous les instrumens ont été construits par *Bird*, qui de simple tisserand, devint, comme on sait, un des premiers mécaniciens de l'Angleterre.

OBSERVATOIRE DE RICHEMOND.

Cet observatoire, situé sur la rive droite de la Tamise, et à quelques lieues de Londres, a été bâti près du palais de *Kew*, au milieu du beau parc de Richemond. Il a été construit par ordre du roi Georges III, qui cherchait un noble délassement

---

(1) Le 1er volume parut en 1798, sous ce titre : *Astronomical observations made at the royal observatory at Greenwich, from the year* 1750 *to the year* 1762, *by the reverend* James Bradley, *D. D*, *astronomer royal, savilian prof. of astronomy at Oxford*, etc, at the Clarendon press. inf. Bradley avait été nommé en 1730, professeur d'astronomie et de physique au Museum d'Oxford; il remplaça en 1741, *Halley*, à l'Observatoire royal. (Voyez le vol. précédent, page 315). On voit encore à la bibliothéque Radcliffe, différens instrumens dont cet homme illustre a fait usage, et entre autres un petit instrument qui paraît lui avoir servi à démontrer l'aberration de la lumière.

dans la culture des sciences et particulièrement de l'astronomie.

Cet édifice, sans offrir de grandes proportions, est d'une forme agréable. Le rez-de-chaussée se compose de deux salles octogones régulières *c* et *f*, qui servent de dépôt à une belle collection d'instrumens de physique. La longueur de ces salles est de 18 pieds.

Dans la chambre *b*, qui est de forme rectangulaire, on a placé sur un vaste massif un tiers de cercle d'une grande dimension, dont la construction est due à *Sisson*. Le cabinet triangulaire *c*, contient aussi un secteur zénithal du même artiste.

La lunette méridienne *a* est placée dans la chambre opposée; sa longueur est de 8 à 9 pieds. Elle a été construite par *Bird* et *Adams*. Les trappes qui protègent cet instrument, sont d'une construction massive et se meuvent avec beaucoup de difficulté.

Dans les deux chambres qui correspondent à *e* et *f*, au-dessus du rez-de-chaussée, on a déposé une collection d'objets d'histoire naturelle, qui ont également servi au Roi précédent. Dans la partie supérieure du bâtiment se trouve un équatorial placé sous un toit mobile.

La direction de l'observatoire de Richemond fut confiée d'abord au docteur *Bevis*, et ensuite au docteur *De Mainbray*. M. *Rigaud*, qui se trouve actuellement à l'observatoire d'Oxford, en a eu aussi la direction pendant quelque temps, et l'a laissée en partant à M. *De Mainbray*, son parent, qui est le directeur actuel.

OBSERVATOIRE DE CAMBRIDGE.

Cambridge renfermait déjà plusieurs observatoires particuliers avant que l'on construisît celui dont nous présentons ici le plan. La plupart des colléges avaient dans leurs tourelles de forme gothique des lieux plus ou moins appropriés aux besoins de l'astronomie. Au collége de la Trinité, on montrait

avec orgueil, à côté du monument et de la chaire de *Newton* (1), la tour où l'on suppose que ce grand homme a fait des observations. Au collége Pembrock, on montrait un globe céleste de fer blanc d'une très-grande dimension. Au collége St Jean, le docteur *Ludlam* avait recueilli de nombreuses observations qu'il a fait paraître successivement.

L'observatoire que l'on vient de bâtir, à peu de distance de la ville, dans un lieu parfaitement découvert, est beaucoup mieux approprié aux besoins de la science; c'est un grand bâtiment de forme régulière, avec deux ailes qui se prolongent vers le Nord, et qui servent de demeure au directeur et aux assistans. Les instrumens méridiens sont établis au rez-de-chaussée dans des salles très-élevées; de manière que le toit est de niveau avec le toit de la demeure des astronomes, laquelle ne comprend que le rez-de-chaussée et un entre-sol.

Le corps du milieu du bâtiment, qui forme à proprement parler l'observatoire, se compose de quatre salles et d'un vestibule devant lequel se trouve un beau péristyle.

La salle d'observation *e* contient une lunette méridienne de grande dimension, semblable à celle qui a été faite par *Troughton* pour l'observatoire de Greenwich; la distance focale est de 9 pieds 10 pouces anglais, et l'ouverture de 5 pouces. Le poids de l'instrument est de 200 livres, la longueur de l'axe est de 3 pieds 1/2. Le micromètre a 7 fils fixes et deux fils mobiles dont la distance égale à celle des premiers est de 17″, 88. Près de l'oculaire sont deux petits cercles gradués, destinés à trouver les astres dans le méridien, et semblables à ceux que porte l'instrument de Greenwich (2). M. *Woodhouse* a donné dans les *transactions philosophiques* pour 1825, une description détaillée de cet instrument, qui a été construit par M. *Dollond* (3).

---

(1) M. *Babbage*, connu par des recherches ingénieuses dans les sciences, et particulièrement par sa machine à calculer, vient d'être appelé à la chaire de Newton, qui existe encore au collége de la Trinité.

(2) Voyez le premier article *Observatoires*, tome IV.

(3) Depuis le funeste accident de M. *Woodhouse*, M. *Airy*, a été désigné

Le cercle mural qui aura également 10 pieds de diamètre, sera établi sur un grand massif dans la salle voisine *d*. C'est le célèbre *Troughton* qui est chargé de la confection de cet instrument. Les ouvertures pratiquées dans les murs et le toit sont fermées par des châssis de bois qu'on peut séparer autant qu'on le désire en les faisant glisser dans des coulisses, au moyen de cordes qui s'enroulent sur des tours. Ces ouvertures sont très-larges.

Dans la salle *b*, se trouvent quelques instrumens de moindre dimension, qui doivent servir à l'enseignement, tels qu'une lunette méridienne, un quart de cercle mobile et quelques lunettes, dont une de 3 pieds et demi de foyer, a été contruite par *Dollond*.

Derrière le vestibule s'élèvent le massif qui doit porter un équatorial, et l'escalier qui conduit au cabinet où l'on placera cet instrument qu'on n'a point encore terminé; le toit mobile est de forme sphérique et d'une grande dimension; le massif repose sur de fermes fondemens disposés en forme de croix.

---

pour être directeur. Quand je visitai l'Observatoire, au mois de novembre 1827, le nouveau directeur n'était pas encore installé. J'ai pu visiter cependant le bâtiment, grâce à l'obligeance de M. *Sheepshanks*, membre du collége de la Trinité, qui a bien voulu me le montrer dans tous ses détails.

d'Oxford.

Habitation des Adjoints.

i

mètres.

h. de Burggraff, à Brux.

Résumé des observations météorologiques faites à Maestricht pendant l'année 1828, par M. CRAHAY, professeur à l'Athénée royal de Mastricht.

Les températures sont exprimées en degrés de l'échelle centigrade; les hauteurs du baromètre, réduites à la température de la glace fondante, et corrigées de l'effet de la capillarité, sont énoncées en lignes des Pays-Bas (millimètres). La cuvette du baromètre est placée à 52^m, 51 au-dessus du niveau de la mer. Enfin les hauteurs des eaux de la Meuse sont observées à l'entrée de la grande écluse du bassin en cette ville, et rapportées à la moyenne hauteur du niveau dans ce bassin, laquelle est fixée à 41^m, 95 au-dessus du zéro de l'échelle d'Amsterdam (*peil-schaal*).

MOIS.	TEMPÉRATURE MOYENNE PAR MOIS.			
	9 heures du matin.	midi.	3 heures du soir	9 heures du soir.
Janvier	+ 3°,62	+ 5°,52	+ 5°,40	+ 3°,61
Février	3, 31	5, 69	5, 46	2, 60
Mars	6, 51	8, 30	8, 77	5, 88
Avril	10, 70	13, 40	13, 65	9, 60
Mai	15, 68	18, 42	18, 47	14, 06
Juin	19, 92	21, 59	22, 13	16, 93
Juillet	21, 01	23, 19	22, 88	18, 23
Août	14, 94	20, 28	20, 74	16, 21
Septembre	15, 50	19, 86	20, 67	15, 76
Octobre	9, 81	13, 16	13, 83	10, 46
Novembre	6, 23	9, 32	9, 62	7, 00
Décembre	5, 24	6, 83	7, 04	5, 55
Moyennes	11, 04	13, 80	14, 06	10, 49

TEMPÉRATURE.

MOIS.	MAXIMUM moyen PAR MOIS.	MINIMUM moyen PAR MOIS.	DIFFÉRENCE.	MAXIMUM absolu PAR MOIS.	MINIMUM absolu PAR MOIS.	DIFFÉRENCE.	DATE DU MAXIMUM ABSOLU.	DATE DU MINIMUM ABSOLU.	Plus grande variation en 24 heures.
								nuit.	
Janvier . . .	+ 6°,28	+ 1°,58	4°,70	+ 11°, 1	— 8°, 2	19°, 3	19, à 3 h. s.	du 9 au 10	9°,0 le 11
Février . . .	5, 88	0, 52	5, 36	13, 4	— 13, 0	26, 4	27, à midi.	du 13 » 14	11, 6 » 21
Mars	9, 15	2, 99	6, 16	16, 2	— 6, 3	22, 5	15, à 3 h. s.	du 6 » 7	11, 6 » 15
Avril	14, 02	5, 83	8, 19	23, 5	— 3, 0	26, 5	29, à 3 h. s.	du 4 » 5	15, 1 » 28
Mai	19, 32	9, 58	9, 74	25, 6	+ 4, 4	21, 2	26, à 3 h. s	du 2 » 3	18, 7 » 15
Juin	22, 64	12, 09	10, 55	30, 6	+ 7, 5	23, 1	20, à midi.	du 8 » 9	17, 4 » 16
Juillet . . .	24, 03	15, 22	8, 81	33, 7	+ 9, 8	23, 9	4, à 3 h. s.	du 28 » 29	15, 3 » 4
Août	21, 17	12, 88	8, 29	26, 7	+ 8, 3	18, 4	2, à 3 h. s.	du 31 jt. » 1at	14, 1 » 17
Septembre . .	21, 00	10, 67	10, 33	26, 0	+ 3, 3	22, 7	10, à 3 h. s.	du 16 » 17	17, 0 » 20
Octobre . . .	14, 02	6, 36	7, 66	19, 5	— 4, 5	24, 0	5, à 3 h. s.	du 29 » 30	15, 1 » 20
Novembre . .	9, 77	3, 42	6, 35	15, 3	— 8, 5	23, 8	15, à midi.	du 8 » 9	14, 1 » 19
Décembre . .	7, 31	2, 53	4. 78	12, 6	— 4, 6	17, 2	18, à 3 h. s.	du 2 » 3	10, 7 » 17
MOYENNES . .	+ 14, 55	+ 6, 97	7, 58	+ 21, 18	— 1, 23	22, 41			14, 14

Maximum absolu de l'année. . . . . . + 33°,7
Minimum. . . . . — 13, 0
Intervalle de l'échelle parcouru. . . . 46, 7

Le *maximum* moyen et le *minimum* moyen sont les moyennes des plus hautes et des plus basses températures observées jour par jour.
Le *maximum* absolu et le *minimum* absolu sont la plus haute et la plus basse températures qui ont été observées pendant le mois entier.

PRESSION ATMOSPHÉRIQUE.

MOIS.	HAUTEURS MOYENNES DU BAROMÈTRE, PAR MOIS. 9 HEURES du matin.	MIDI.	3 HEURES du soir.	9 HEURES du soir.	MAXIMUM absolu PAR MOIS.	MINIMUM absolu PAR MOIS.	DIFFÉRENCE.	DATE du MAXIMUM.	DATE du MINIMUM.
Janvier . . .	760l,40	760l,36	760l,29	760l, 59	771l, 36	745l, 65	25l, 71	24, à 9 h. m.	3, à midi.
Février . . .	55, 70	55, 61	55, 31	56, 02	71, 33	37, 15	34, 18	3, à 9 h. s.	21, à 9 h s.
Mars.	56, 76	56, 76	56, 17	56, 76	68, 49	30, 01	38, 48	16, à 9 h. m.	21, à 5 1/4 h. s.
Avril	55, 18	54, 88	54, 50	54, 86	67, 79	42, 22	25, 57	28, à 9 h. m.	8, à 9 h s.
Mai	56, 10	55, 82	55, 50	55, 91	67, 44	46, 98	20, 46	1, à 9 h. m.	21, à midi.
Juin	59, 26	58, 84	58, 79	59, 07	67, 30	46, 75	20, 55	26, à 9 h. m.	5, à midi.
Juillet	52, 73	52, 60	52, 55	52, 94	59, 71	44, 86	14, 85	31, à 9 h. s.	20, à midi.
Août.	56, 19	55, 97	55, 82	56, 10	67, [illegible]	44, 10	23, 11	26, à 9 h. m.	6, à 7 h s.
Septembre .	58, 96	58, 49	58, 09	58, 45	72, 08	44, 97	27, 11	16, à 9 h. m.	12, à 5 h. s.
Octobre . . .	61, 64	61, 42	61, 10	61, 70	71, 85	45, 55	26, 30	12, à midi.	6, à 9 h. m.
Novembre. .	58, 64	58, 32	58, 05	58, 58	68, 11	46, 94	21, 17	3, à 9 h. s.	15, à 3 h s.
Décembre. .	61, 25	60, 05	6[illegible], 68	61, 34	[illegible]	44, 50	28, 10	2, à 9 h m.	8, à 9 h s.
MOYENNES . .	757, 73	757, 50	757, 24	757, 69	768, 77	743, 31	25, 46		

Maximum absolu de l'année 772l, 60
Minimum 730, 01
Intervalle de l'échelle parcouru . . 42, 59

EAU TOMBÉE DU CIEL. — ÉTAT DE LA RIVIÈRE.

MOIS.	Nombre de jours de pluie, de neige ou de grêle.	Eau tombée en pouces des Pays-Bas de hauteur.	Hauteur moyenne de l'eau tombée par chaque jour de pluie, de neige ou de grêle.	HAUTEUR DE LA MEUSE, EN AUNES DES PAYS-BAS. HAUTEUR MOYENNE par mois.	MAXIMUM absolu PAR MOIS.	MINIMUM absolu PAR MOIS.	DIFFÉRENCE.	DATE du MAXIMUM.	DATE du MINIMUM.
Janvier	19	9p,004	op,474	+ 1a,880	+ 3a, 80	+ oa, 95	2a,85	16	11
Février	16	3, 403	o, 213	+ 1, 247	+ 1, 88	+ o, 87	1, 01	7	20
Mars.	23	6, 589	o, 287	+ 1, 159	+ 1, 78	+ o, 78	1, 00	11	21
Avril.	24	8, 221	o, 343	+ 1, 151	+ 1, 73	+ o, 72	1, 01	22	15 et 16
Mai	14	6, 854	o, 490	+ o, 359	+ o, 98	+ o, 08	o, 90	1	21
Juin	15	2, 674	o, 178	— o, 020	+ o, 16	— o, 23	o, 39	du 7 au 10	30
Juillet.	22	10, 415	o, 473	— o, 033	+ o, 42	— o, 31	o, 73	28	6
Août.	21	6, 529	o, 311	+ o, 900	+ 2, 32	+ o, 13	2, 19	9	3
Septembre . .	12	8, 988	o, 749	+ o, 032	+ o, 23	— o, 15	o, 38	1	29
Octobre	15	3, 111	o, 207	— o, 137	— o, 02	— o, 21	o, 19	11	26 et 27
Novembre. . .	13	1, 368	o, 105	— o, 110	+ o, 15	— o, 30	o, 45	23	10
Décembre. . .	18	4, 407	o, 245	+ o, 727	+ 2, 55	— o, 11	2, 66	22	5
	TOTAL. 212	TOTAL. 71p, 563	MOYENNE. op, 340	MOYENNE. + o, 596	MOYENNE. + 1, 332	MOYENNE. + o, 185	MOYENNE. 1, 147		

Maximum absolu de l'année . . . . + 3a, 80

Minimum . . . . — o, 31

Intervalle parcouru 4, 11

En divisant la hauteur de l'eau tombée par mois, par le nombre de jours de pluie, de neige ou de grêle correspondant, on obtient la hauteur moyenne de l'eau tombée par chacun de ces jours.

MOIS.	NOMBRE DE JOURS DE PLUIE.	GRÊLE.	NEIGE.	GELÉE.	TONNERRE	BROUILLARD	CIEL entièrement COUVERT.	CIEL sans NUAGES.
Janvier	18	0	3	11	0	1	9	0
Février	14	0	3	13	0	0	7	0
Mars	21	6	4	9	1	1	4	0
Avril	23	4	4	4	1	0	4	0
Mai	14	0	0	0	2	0	0	0
Juin	15	0	0	0	0	0	1	0
Juillet	22	1	0	0	4	0	0	0
Août	21	0	0	0	5	0	0	0
Septembre	12	0	0	0	3	1	1	4
Octobre	15	0	0	7	0	3	2	1
Novembre	13	0	0	9	0	2	5	3
Décembre	18	0	1	12	0	4	8	0
TOTAUX.	206	11	15	65	16	12	41	8

MOIS.	NOMBRE DE JOURS DES VENTS DOMINANS.							
	NORD.	NORD-EST.	EST.	SUD-EST.	SUD.	SUD-OUEST	OUEST.	NORD-OUEST.
Janvier	2	3	1	0	3	12	9	1
Février	4	1	3	0	4	9	5	3
Mars	2	0	0	0	0	3	24	2
Avril	3	1	0	1	2	8	13	2
Mai	4	5	5	0	2	4	9	2
Juin	4	5	2	0	2	7	7	3
Juillet	0	0	0	1	5	9	16	0
Août	3	2	0	1	4	8	11	2
Septembre	4	5	6	2	2	3	8	0
Octobre	8	1	0	0	5	8	8	1
Novembre	2	1	3	1	4	7	12	0
Décembre	1	1	1	1	2	8	16	1
Totaux	37	25	21	7	35	86	138	17

Antérieurement j'ai employé dans mes tableaux des hauteurs de la rivière, les observations faites à l'échelle tracée contre l'arrière-bec de l'une des piles du pont. Maintenant que les observations se font aussi à l'entrée de l'écluse du bassin, qui est située en aval du pont, je préfère ces dernières comme étant susceptibles de beaucoup plus d'exactitude.

D'après les ingénieurs du waterstaat, le zéro du pont est à o^a, 246 au-dessus de celui de l'embouchure de l'écluse. Et, en comparant les deux séries d'observations, je trouve que, moyennement, la surface de la rivière est plus élevée au premier endroit qu'au second de o^a, 47.

Pendant l'année 1828 je n'ai observé de phénomène remarquable que les deux tremblemens de terre, l'un le 23 février à 8 heures 25 minutes du matin, l'autre le 3 décembre vers $6\frac{1}{2}$ heures du soir. La secousse du 23 février était assez forte, elle a été ressentie dans toute la ville; elle a duré environ 5 secondes, et l'on pense généralement que sa direction était du nord au sud. Quant à la secousse éprouvée le 3 décembre, son intensité paraît avoir été moins grande de même que sa durée; il semble aussi que cette intensité a été différente d'un quartier de la ville à l'autre, car il est des personnes (et je suis de ce nombre) qui ne se sont pas aperçues du phénomène. Un mugissement pareil à celui d'une mer houleuse entendue de loin, a frappé les oreilles de quelques personnes qui se trouvèrent en plein air pendant le tremblement (1).

Je crois utile de joindre ici le tableau des observations diurnes faites aux époques des deux tremblemens. L'opposition dans l'état de l'instrument en février et en décembre doit convaincre qu'il n'y a point de relation entre le tremblement de terre et la pression atmosphérique. Les baisses rapides de l'instrument sont des pronostics plus certains des tempêtes. L'oscillation remarquable du 1er décembre en a malheureusement fourni de nouvelles preuves; des désastres sont arrivés sur la Méditerranée et sur la mer du Nord.

---

(1) Voyez aussi pour ces tremblemens de terre le volume précédent.

DATE.	9 HEURES DU MATIN.		MIDI.		3 HEURES DU SOIR.		9 HEURES DU SOIR.	
	BAROM. à 0°.	TEMPÉRATURE.	BAROM. à 0°.	TEMPÉRATURE.	BAROM. à 0°.	TEMPÉRATURE.	BAROM. à 0°.	TEMPÉRATURE.
FÉVRIER.	l	o	l	o	l	o	l	o
20	747,09	+ 2,2	745,36	+ 6,0	745,04	+ 5,2	744,10	+ 1,6
21	740,63	+ 3,4	741,55	+ 9,7	738,13	+10,0	737,15	+ 2,8
22	738,56	+ 3,0	738,37	+11,7	738,24	+11,4	738,05	+ 4,2
23	740,34	+ 7,4	741,47	+ 9,6	742,47	+ 9,3	745,93	+ 5,5
24	752,21	+ 4,6	754,09	+ 5,5	755,46	+ 5,2	758,73	+ 4,6

Le baromètre continue à monter régulièrement.

Le 23, à l'instant du tremblement de terre, le barom. est à 740^{l},10.

NOVEMB.	l	o	l	o	l	o	l	o
29	762,38	+12,7	761,49	+13,7	761,30	+13,6	761,72	+12,7
30	762,41	+11,0	762,28	+10,5	761,72	+10,2	759,65	+10,8
DÉCEMB. 1	753,05	+ 9,4	751,55	9,8	751,55	+ 8,9	762,08	+ 1,7
2	772,60	— 2,4	772,11	+ 0,4	772,27	+ 0,7	772,21	— 2,0
3	768,84	0,0	766,72	+ 4,2	765,76	+ 4,2	765,57	+ 2,5
4	765,03	+ 5,3	765,46	+ 6,7	765,27	+ 6,7	766,81	+ 6,1

Le baromètre monte jusqu'au 5, ensuite il baisse.

THERMOMÈTRE à minimum PENDANT LA NUIT.	VENTS.	ÉTAT DU CIEL, ETC.
— 1°,1	S.-O.	Éclaircies le matin ; nuages l'après-midi ; un peu de pluie.
— 1,6	S.	Ciel nuageux.
+ 0,6	S.	Nuageux ; couvert le soir.
+ 0,6	S.	Couvert jusqu'à 9 heures du matin, ensuite nuageux. Tremblement de terre à 8h 25' du matin ; couvert le soir ; léger brouillard à 8 heures du soir : il a disparu à 9 heures.
+ 3,4	O.	Couvert ; un peu de pluie.
+ 11°,6	O.	Couvert ; très-humide ; pluie vers 9 heures du soir.
+ 10,5	N.	Couvert ; pluie fine continue.
+ 8,6	O.	Couvert ; pluie pendant le jour. Le soir, pluie et neige ; vent fort de N.-E. ; ciel clair à 9 heures du soir.
— 4,5	E.	Légers nuages.
— 4,6	S.-O.	Nuages ; tremblement de terre à 6 heures et demie du soir.
+ 0,8	O.	Couvert ; pluie fine le soir.

Prix moyens du froment, du seigle, de l'orge et de l'avoine, à Bruxelles, depuis 1500 *jusqu'à nos jours* (1).

Plusieurs économistes distingués, et entre autres M. *J.-B. Say*, ont cherché à établir la dépréciation de l'argent depuis l'antiquité jusqu'à nos jours, par la quantité plus ou moins grande de ce métal qu'il a fallu donner à différentes époques, pour obtenir une même quantité de blé. L'utilité que l'économie politique peut retirer de semblables calculs m'a porté à publier les documens suivans, qui pourront d'ailleurs par eux-mêmes piquer la curiosité de nos lecteurs (2).

ANNÉES.	FROMENT.		SEIGLE.		ORGE.		AVOINE.	
	fl.	s.	fl.	s.	fl.	s.	fl.	s.
1500	»	9	»	8	»	»	»	»
1510	»	10	»	8	»	»	»	»
1520	»	13	»	10	»	»	»	»
1530	»	15	»	11	»	9	»	6
1540	»	16	»	12	»	10	»	7
1550	1	2	»	16	»	14	»	9
1560	1	3	»	17	»	16	»	10
1570	1	16	1	6	1	5	»	14
1580	2	16	1	19	1	11	1	2

(1) Je dois à l'obligeance de M. *Cuylen*, secrétaire de la régence de Bruxelles, la communication des papiers d'où j'extrais les documens qui font l'objet de cette note. A. Q.

(2) La mesure est la *rasière*, qui se partage en 16 picotins, l'hectolitre vaut 2 rasières et $\frac{4}{3}$ picotin ou 2r,083; la monnaie est le florin de Brabant, qui vaut 0,8571 florin des Pays-Bas, et 1,8141 franc (arg. de France). Ces résultats sont les moyennes des dix ans qui suivent l'année indiquée.

ANNÉE.	FROMENT. fl.	s.	SEIGLE. fl.	s.	ORGE. s.	fl.	AVOINE. fl.	s.
1590	2	18	1	19	1	19	1	2
1600	2	8	1	14	1	12	»	18
1610	2	11	1	16	1	13	»	19
1620	4	»	2	12	1	19	1	7
1630	4	4	2	19	2	11	1	11
1640	4	1	2	18	2	12	1	10
1650	3	14	2	11	2	7	1	8
1660	3	10	2	10	2	1	1	5
1670	3	10	2	5	2	1	1	7
1680	2	14	2	16	1	13	1	3
1690	4	8	3	3	2	9	1	12
1700	3	6	2	5	2	2	1	6
1710	3	2	2	2	1	18	1	5
1720	2	12	1	18	1	11	1	»
1730	2	8	1	15	1	8	»	19
1740	3	1	1	19	1	15	1	3
1750	2	12	1	17	1	12	1	2
1760	3	2	2	1	1	13	1	4
1770	3	8	2	4	1	19	1	6
1780	3	12	2	10	2	6	1	9
1790	4	8	2	19	2	12	1	16
1800 (1)	4	49	2	93	2	50	1	70
1810	5	75	3	76	3	04	1	94
1820	3	45	2	21	1	85	1	45

On voit que vers le milieu du seizième siècle, le prix des grains à subi une augmentation considérable : on sait du reste qu'elle

(1) Comme nous l'avons déjà fait observer, la mesure de capacité pour les trois siècles qui précèdent, est la rasière, et la monnaie, le florin de Brabant ; dans ce qui suit, la mesure est le demi-hectolitre et la monnaie le florin des Pays-Bas.

est due à la découverte de l'Amérique, qui nous a mis en possession d'une plus grande quantité d'or et d'argent.

M. *Say*, dans son *Traité d'économie politique*, a estimé la valeur de l'hectolitre de blé, en grains d'argent pur, pour quelques époques marquantes : voici les valeurs qu'il a obtenues par ses calculs ;

à Athènes,	au temps	de Démosthènes	303 gr.
à Rome,	»	de César	270
en France,	»	de Charlemagne.	245
»	»	de Charles VII	219
»	(1514)	. . . .	333
»	(1536)	sous François Ier.	731
»	(1610)	à la mort de Henri IV. . .	1130
»	(1640)	. . . .	1280
»	(1789)	. . . .	1342
»	(1820)	. . . .	1610

M. *Say* conclut de ses résultats que la valeur propre de l'argent a décliné dans la proportion de six à un.

Nous ferons une autre observation assez remarquable, c'est que le rapport des valeurs du froment, du seigle, de l'orge et de l'avoine ont fort peu varié, pendant que le rapport des valeurs de ces céréales et de l'argent subissait des variations si remarquables. En prenant en effet pour unité la valeur du froment dans chaque siècle, on trouve pour

LE SIÈCLE.	SEIGLE.	ORGE.	AVOINE.
16me	0,72	0,61	0,38
17me	0,72	0,60	0,37
18me	0,68	0,59	0,39
19me	0,65	0,54	0,37

L'orge et le seigle ont cependant sensiblement perdu de leur valeur, en comparant leurs prix à celui du froment; il n'en est pas de même de l'avoine; le rapport a conservé une valeur à peu près rigoureusement la même.

Avertissement et observations sur les recherches statistiques insérées dans ce recueil.

La *Correspondance Mathématique et physique* paraît sous une forme un peu différente de celle que nous lui avons donnée jusqu'à présent. Destinée d'abord spécialement à nos universités et à nos colléges, elle devait présenter des articles élémentaires, variés et de peu d'étendue; mais plusieurs savans nationaux et étrangers ayant bien voulu y déposer le résultat de leurs recherches, nous nous sommes trouvés dans la nécessité de supprimer des sous-divisions trop nombreuses, qui devaient nuire généralement à l'insertion totale de mémoires qui demandaient une prompte publication. Désormais nous ne nous assujettirons en conséquence à aucune division régulière, tout en continuant cependant à embrasser les mêmes sujets dans notre cadre (1).

Dans un journal des provinces septentrionales, on a trouvé mauvais que nous ayons consacré quelques pages à des recherches de statistique, comme si cette science, dit-on, était une application des mathématiques. Le rédacteur nous blâme surtout d'avoir eu la prétention d'embrasser toute la statistique *de geheele statistiek* (2), quoique nous n'ayons jamais énoncé un seul mot qui puisse justifier une pareille assertion. Nous nous sommes bornés à présenter des documens qui pouvaient s'exprimer numériquement et qui étaient plutôt du domaine des probabilités; ainsi nous avons cru et nous persistons à croire que des discussions sur les lois de la population et de la mortalité, par exemple, appartiennent bien plus à un recueil tel que le nôtre, qu'à un journal de littérature ou même de jurisprudence;

---

(1) Nous saisissons cette occasion pour remercier M. *Verhulst*, docteur en sciences, qui a depuis long-temps l'obligeance de nous aider dans la partie la plus pénible de notre entreprise, c'est-à-dire dans la révision des épreuves.

A. Q.

(2) *Bydragen tot regtsgeleerdheid en wetgeving*, n° 1, page 43, 1829.

nous sommes loin cependant de vouloir lancer pour cela une interdiction en notre faveur. Nous aimons la tolérance dans ces matières comme en toutes choses : ainsi nous concevons que le rédacteur ait en aversion ce qu'il nomme de misérables tableaux numériques *dat ongelukkig tabellenwezen* (1) ; nous concevons même que dans ses leçons, il fasse le moins possible usage des nombres, comme il nous en donne l'assurance (2) ; il a sans doute ses raisons pour en user ainsi, comme nous avons les nôtres pour en user autrement.

Mais nous ne pensons pas que ce soit un motif pour nous traiter avec un dédain superbe dont il n'est pas plus économe du reste envers MM. *Lucas*, *Dupin* et plusieurs autres savans qu'il accuse de voir matériellement les choses, de traiter les hommes comme des machines (3) et d'étudier les états comme des cadavres. Cette manière d'accuser de matérialisme des hommes que l'on connaît peu, que peut être même on ne connaît pas, me semble peu charitable et peu propre à éclairer une discussion. Nous avons trop bonne opinion du caractère de M. *Den Tex*, pour user de pareilles armes envers lui. Comme du reste son article contient sur les probabilités quelques idées qui nous ont paru peu exactes, nous avons cru utile d'y répondre.

M. *Den Tex* paroît mécontent ce que j'ai dit que la plupart de nos connaissances ne sont fondées que sur des probabilités plus

(1) Le mot me parait dûr cependant, car il embrasserait dans la même proscription les *Recherches statistiques sur Paris*, les *Comptes rendus* en France par le ministre de la justice, les *Statistical illustrations* de la société de Londres, les publications statistiques de notre gouvernement, etc., etc.; certes ce n'est pas ce qu'à voulu dire le rédacteur, si j'en juge par quelques autres passages de son article.

(2) *Van getallen komt daarom in mijne lessen zoo min mogelijk voor*, page 52.

(3) M. *Den Tex* s'indigne de voir l'estimation de la force de l'homme comparée à celle des chevaux, des ânes, des moulins, etc., voyez pages 45 et suivantes.

ou moins fortes ; il regarde cette assertion comme subversive de oute morale (1). On voit que M. *Den Tex* n'aime pas à douter, bien différent en cela de l'illustre *La Place* et des hommes les plus distingués dans tous les genres de sciences. L'assertion qui a paru si choquante n'est du reste pas de moi (2), elle n'est pas même nouvelle ; toutes les personnes qui ont eu le loisir de s'occuper un peu du calcul des probabilités savent que c'est une des propositions fondamentales de cette science. Le rédacteur se demande ensuite si l'on aura à calculer chaque fois la probabilité de chacune de nos connaissances. Nous trouverions dans cet embarras de M. *Den Tex* et dans plusieurs de ses assertions une preuve, au moins *très-probable*, qu'il n'a point lu notre opuscule (3), ou qu'il était très-préoccupé en le lisant, car il ne se serait pas donné la peine de poser une semblable question. Si nous nous arrêtons à ces détails, c'est moins pour entretenir nos lecteurs de choses qui nous sont personnelles, (nous avons toujours évité de le faire) que pour montrer combien les premiers principes du calcul des probabilités sont encore généralement méconnus.

J'avais dit qu'on pouvait juger du degré de perfection à laquelle une science est parvenue, par la facilité plus ou moins grande avec laquelle elle se laisse aborder par le calcul. Cette

---

(1) *Maar om te zeggen dat onze meeste kennis slechts op waarschijnlijkheden berust, en dat men* DAAROM OVERAL *die waarschijnlijkheid moet berekenen...,.. Neen, ik kan en mag mijne vrees, van op die wijze al de waarde van pligten en zedeleer te zien verloren gaan, niet verbergen*, page 50.

(2) « On peut même dire, *à parler en rigueur*, que presque toutes nos connaissances ne sont que probables, et dans le petit nombre des choses que nous pouvons savoir avec certitude, dans les sciences mathématiques elles-mêmes, les principaux moyens de parvenir à la vérité, l'induction et l'analogie se fondent sur les probabilités ; en sorte que le système entier des connaissances humaines, se rattache à la théorie exposée dans cet *Essai (des probabilités*, 1re page, *La Place*). »

(3) *Instructions populaires sur le calcul des probabilités*, in-18, chez Hayez, Bruxelles, 1828.

proposition a encore paru malsonnante, quoique je puisse citer pour exemples, l'astronomie, la physique, la chimie moderne, la cristallographie, la théorie des élections, et certes je n'ai point prétendu dire qu'on verrait un jour le jurisconsulte mettre le droit naturel en équations, ou le médecin traiter ses malades d'après les propositions de la géométrie; mais la musique, la peinture, la médecine, le droit même ont des côtés par lesquels ils tiennent aux sciences exactes, et la théorie de l'acoustique, de la perspective, des probabilités, etc., sont-là pour attester le fait. La grande affaire est de reconnaître ces côtés et de savoir les aborder convenablement. Il est vrai que M. *Den Tex* regarde aussi comme conduisant à la perte des mœurs, l'application du calcul à la probabilité des jugemens. Il ne resterait plus qu'à calculer, dit-il, quelle est la probabilité qu'un enfant naissant sera un jour assassin. Nous répèterons encore que si M. *Den Tex* avait lu attentivement nos *Instructions populaires sur les probabilités*, il n'aurait point posé une semblable question, ou il aurait su comment il convenait de la poser et sous quelles restrictions.

Je ne parlerai du reproche de légèreté que le rédacteur m'adresse (1), un peu légèrement d'après ce qu'on a pu voir, que pour rétablir le sens d'un mot qui ne paraît pas avoir été bien compris : le reproche de légèreté dont on use généralement tant de nos jours et surtout dans notre pays, sans doute parce qu'on s'y croit plus grave qu'ailleurs, ne devrait être émis qu'avec la plus grande circonspection ; parce qu'étant loin d'être infaillibles nous-mêmes, on pourrait à chaque erreur qui nous échappe, nous appliquer le même reproche, et cela nous conduirait peut-être fort loin : la gravité de plus d'un savant pourrait se trouver étrangement compromise. Nous avions remarqué d'après les documens numériques des tribunaux, que le nombre des acquittemens devant les cours d'assises était en France et en Angle-

(1) *Een nederlandsch schrijver bevestigde, door zijn voorbeeld, wat wij van de* ligtvaardige *gevolgtrekkingen zoo even opmerkten*, *pag.* 49.

terre double ce qu'il est chez nous, où sur 100 accusés 16 seulement sont acquittés; et de là nous avions été conduits à dire que cette proportion est affligeante. Quoi de plus pénible en effet, que ce dilemme; la moitié des individus que l'Angleterre et la France renvoient absous, et que l'on condamne ici, sont criminels ou innocens : s'ils sont criminels, ce sont autant de fléaux que l'on rend à la société et dont l'impunité doit exciter à de nouveaux crimes; s'ils sont innocens et qu'on les condamne, le regret doit être bien plus vif encore; et l'on nous demande avec une froide ironie comment nous savons que cette proportion est affligeante! On nous dit que les tribunaux anglais et français peuvent mettre en accusation avec plus de *légèreté* (1) que les nôtres. Mais remarquons d'abord que nos tribunaux correctionnels condamnent exactement avec la même rigueur qu'en France, que nos tribunaux de simple police condamnent encore avec la même rigueur; ce n'est que devant les cours d'assises qu'on trouve cette énorme disproportion. Voilà donc que cette accusation de légèreté devient aussi applicable à nos magistrats qui siègent dans des tribunaux correctionnels ou de simple police (2); et croit-on que la sévérité aura produit des effets salutaires, nous en doutons, car la France et les Pays-Bas ont présenté en 1826 à peu près exactement le même nombre d'accusés devant les tribunaux criminels, correctionnels et de simple police. Nous le répétons, ce résultat est affligeant, et nous ne prétendons pas dire pour cela que le jury soit un bien ou un mal, que nous ayons tort ou raison de le proscrire dans ce royaume. C'est une question que nous n'avons jamais cherché à soulever et encore moins à trancher, nous sentons trop bien notre insuffisance. Il est très-imprudent de parler d'une science qu'on ne

(1) *Wanneer men eens in Nederland minder ligtzinnig is in iemand in staat van beschuldiging te stellen dan in Frankrijk.*

(2) Nous donnerions ici les nombres à l'appui de nos assertions, s'ils ne devaient paraître bientôt avec de nombreux développemens dans un mémoire qui est sous presse.

connaît pas, ou d'un livre qu'on n'a pas lu, ou même d'une phrase qu'on n'a pas comprise. Voilà ce qui s'appelle s'exposer gravement au reproche de *légèreté*; et nous serions très-fâchés de l'avoir encouru.

Correspondance et Annonces scientifiques.

Nous apprenons que l'on se propose de reconstruire l'observatoire de Genève, et que la forme du nouvel édifice sera à peu près semblable à celle de l'observatoire qu'on bâtit actuellement à Bruxelles; seulement les dimensions seront sur une échelle moins grande. On se propose aussi de faire l'acquisition de nouveaux instrumens. Ces changemens auront nécessairement les plus heureux résultats sous la direction de M. le professeur *Gautier*, qui n'a pas moins de zèle pour l'avancement de la science que de modestie et de connaissances variées.

— Nous apprenons encore que la rédaction de la *Bibliothéque universelle* a pris une nouvelle extension. Cet excellent recueil continuera d'avoir pour rédacteur en chef de la partie scientifique M. le professeur *George Maurice*. MM. *De La Rive* et *De Candolle* se sont chargés de ce qui concerne la physique, la chimie et l'histoire naturelle, et M. *Gautier* s'occupera de lapartie astronomique.

— Le conseil de la *société royale* de Londres vient de décider qu'il serait envoyé annuellement à l'observatoire de Bruxelles, un exemplaire des observations de Greenwich. Déjà nous devions à la munificence de M. *South*, l'un des astronomes anglais les plus distingués, un exemplaire complet de cette précieuse collection, depuis l'année 1811 jusqu'en 1826. Nous devons également à l'observatoire royal de France un exemplaire de ses observations publiées jusqu'à présent.

— Les sciences viennent de perdre le docteur *Wollaston*. Ce célèbre physicien avait été frappé de paralysie. Le temps qui a précédé sa mort a été employé à dicter plusieurs mémoires incomplets sur différens sujets. Ces mémoires seront insérés dans le volume des *Transactions* qui est actuellement sous presse.

— M. le capitaine *Sabine* nous apprend que le comité qui a été nommé pour s'occuper du perfectionnement des objectifs, obtient des résultats trés-avantageux. On est parvenu à former un objectif de cinq pouces qui ne laisse rien à désirer ; sa pesanteur spécifique est très-grande (environ 6 fois celle de l'eau).

— On vient de mettre sous presse, à Paris, chez M. *Malher*, une traduction du *Traité de la lumière*, que M. *Herschel* a inséré par différens articles dans la vaste *Encyclopédie métropolitaine* de Londres. M. *Herschel* a bien voulu promettre de communiquer aux traducteurs, MM. *Verhulst* et *Quetelet*, les corrections qu'il pourrait juger nécessaires à son travail.

— M. *Babbage*, qui vient de visiter l'Italie et l'Allemagne, a repris avec activité la construction de sa machine mathématique, qui a été jugée par le comité des ingénieurs MM. *Brunel*, *Donkin*, *Barton*, etc., comme l'ouvrage le plus parfait qu'ils aient vu. Nous apprenons d'un autre côté, par M. *Babbage*, qu'il vient de perfectionner encore son instrument et d'augmenter sa puissance mathématique.

— M. *Brandes*, professeur à Leipsig, vient de faire paraître le 3[e] cahier de ses *Unterhaltungen fur freunde der physik*. On y trouve une notice très-intéressante sur le terrible ouragan du 3 février 1825, qui s'est fait ressentir aussi dans notre pays. — Ce physicien distingué nous parle d'un débordement de la Néwa qui a eu lieu à St.-Pétersbourg, le 3 décembre dernier; il ajoute que le même jour les eaux de la Trave ont été fort hautes à Lubeck, que de secousses ont été ressenties sur les bords du Rhin ; nous avons déjà remarqué que le même phénomène s'est manifesté le même jour à Liége, Spa, Verviers, etc., page 401, tom. IV, et page 6 de ce *numéro*.

— Nous devons à l'obligeance de M. le docteur *Gregory*, professeur à Woolwich, la communication de plusieurs annuaires qui se publient sous ses auspices : *the Ladies' Diary ; the englishman's Almanach ;* et l'*ἄτλασ οὐράνιοσ*, ou atlas céleste. Ces petits ouvrages sont très-intéressans en ce qu'il contiennent des questions à résourdre et des solutions de problèmes fort élégantes.

Nous regrettons à cette occasion que les programmes de nos universités n'aient pas plus de publicité, et que nous soyons presque continuellement dans l'impossibilité d'annoncer les questions mathématiques, ou, du moins, de les annoncer à temps.

— M. *Willems*, de l'Institut des Pays-Bas, vient de faire paraître à Anvers, une brochure très-intéressante sur l'ancienne population de la province d'Anvers, *de oude Bevolking*, etc. Ce sont des documens rédigés pour la commission provinciale de statistique, institution qui peut rendre de grands services, et que nous avons vu supprimer avec peine dans le Brabant méridional. Plusieurs savans étrangers, et M. le baron *De Lindenau* en particulier, avaient vivement apprécié les avantages de ces commissions.

— Il paraît en ce moment à Paris, sous le titre : *Annales des sciences d'observation*, un nouveau recueil mensuel, rédigé par MM. *Saigey* et *Raspail*. Nous le recommandons à l'attention de nos lecteurs. Le prix pour Paris est 30 fr.; pour l'étranger 42. Chez *Baudouin* frères, rue de Vaugirard, n° 17.

QUESTIONS (1).

I. De tous les tétraèdres de même volume, celui de moindre surface totale est équilatéral.

II. De tous les prismes triangulaires de même volume donné, le prisme triangulaire droit et équilatéral est celui dont la somme des arêtes est la moindre.

III. Entre tous les polygones de *n* côtés, décrits dans un polygone aussi de *n* côtés et dont tous les angles sont égaux, le plus petit est celui dont les sommets sont aux milieux des côtés du polygone circonscrit proposé.

(1) Ces questions nous sont communiquées par M. *Noël* de Luxembourg.

Pl. 1.

Fig. 4.

Fig. 6.

A′

R

R

O

h^4

M

p

B

P

C

Q

N

Fig. 2.

D

p

Analise d'un mémoire de géométrie pure, comprenant : 1° les principes des transformations polaires des coniques et des cônes du second degré ; 2° les propriétés générales des surfaces du second degré de révolution ; 3° quelques porpriétés générales des cônes du second degré, et une construction des directions des lignes de courbure des surfaces du même ordre ; par M. CHASLES, ancien élève de l'École Polytechnique (1).

Ire PARTIE. — *Transformations polaires d'une conique et d'un cône du second degré.*

On est conduit dans cette première partie du mémoire à la propriété générale suivante des cônes du second degré :

Dans tout cône du second degré il existe deux droites fixes passant par son sommet, telles que tout plan perpendiculaire à l'une d'elles, coupe le cône suivant une conique dont un des foyers est le point où le plan rencontre cette droite.

Ces deux droites sont appelées *lignes focales* du cône.

Elles jouissent de plusieurs propriétés remarquables qui se trouvent exposées dans la seconde partie du mémoire, comme conséquences de certaines propriétés des surfaces du second degré de révolution.

Parmi les principes généraux des transformations polaires d'un cône du second degré et d'une conique, on remarque le suivant, dont plusieurs des autres sont des conséquences :

La surface polaire d'une conique, par rapport à une sphère, est un cône dont les sections circulaires sont dans des plans

---

(1) Le mémoire dont M. *Chasles* veut bien nous communiquer l'analise, est destiné à paraître dans le 5e volume des *Mémoires* de l'Académie Royale de Bruxelles, qui vient de recevoir l'auteur au nombre de ses correspondans.

A. Q.

perpendiculaires respectivement aux deux lignes focales du cône qui a pour base la conique et pour sommet le centre de la sphère; et dont les lignes focales sont perpendiculaires aux plans des sections circulaires de ce second cône.

IIe PARTIE. — *Propriétés générales des surfaces du second degré de révolution.*

Cette seconde partie du mémoire est divisée en huit paragraphes.

Dans le premier paragraphe intitulé : *Préliminaires*, on établit que la surface polaire d'une sphère, par rapport à une seconde sphère, est une surface de révolution dont un des foyers est au centre de la seconde sphère.

On donne la construction du plan directeur de cette surface de révolution, de son centre et de son cône asymptotique ; et la discussion des différentes formes que peut prendre la surface.

Le second paragraphe intitulé : *Rayons vecteurs et plans vecteurs menés d'un foyer de la surface*, contient dix théorèmes différens qui sont des conséquences immédiates des propriétés les plus simples de la sphère; ils sont tous faciles à exprimer; nous ne citerons que celui-ci :

Les rayons vecteurs menés d'un foyer aux extrémités d'une corde d'une surface de révolution, sont également inclinés sur le rayon vecteur mené au point où cette corde rencontre le plan directeur.

Le troisième paragraphe, intitulé : *Propriétés de deux droites polaires réciproques par rapport à une surface de révolution*, contient six théorèmes, dont le principal est celui-ci :

Deux droites quelconques, polaires réciproques par rapport à une surface du second degré de révolution, étant vues d'un foyer de la surface, paraissent se couper à angle droit.

Le paragraphe quatre, intitulé : *Cônes circonscrits à une surface de révolution*, contient onze théorèmes, parmi lesquels on distingue les suivans :

Un cône étant circonscrit à une surface de révolution, tous les plans menés par la droite d'intersection du plan de la courbe de contact et du plan directeur de la surface, coupent ce cône suivant des coniques qui, étant vues du foyer correspondant au plan directeur, semblent être des cercles concentriques; le centre commun de ces cercles est sur le rayon visuel mené au sommet du cône circonscrit.

Ce théorème comprend ces deux-ci :

Tout cône circonscrit à une surface de révolution coupe le plan directeur, suivant une conique qui, étant vue d'un foyer, paraît être un cercle ayant son centre sur le rayon visuel mené au sommet du cône.

Toute courbe plane tracée sur une surface de révolution, étant vue d'un foyer de la surface, paraît être un cercle dont le centre est sur le rayon visuel mené au sommet du cône circonscrit à la surface, suivant cette courbe.

On conclut de là que :

Toute courbe plane tracée sur un paraboloïde de révolution se projette orthogonalement sur un plan perpendiculaire à l'axe de révolution, suivant un cercle qui a pour centre la projection du sommet du cône circonscrit au paraboloïde, suivant cette courbe.

On fait voir que ce théorème n'est qu'une conséquence d'une propriété générale des paraboloïdes, qui elle-même est un cas particulier d'un théorème général sur les projections stéréographiques, inséré dans la *Correspondance Mathématique et Physique* de M. *Quetelet*, 5e nº du IVe vol.

Voici cette propriété des paraboloïdes :

Si plusieurs surfaces du second degré sont inscrites ou circonscrites à un paraboloïde quelconque, tous les cylindres circonscrits à ces surfaces ayant leurs arêtes parallèles à l'axe du paraboloïde sont semblables entre eux, et leurs axes passent respectivement par les sommets des cônes circonscrits au paraboloïde, suivant ses courbes de contact avec les différentes surfaces.

Deux cônes circonscrits à une surface de révolution se cou-

pent suivant deux courbes planes qui, étant vues d'un foyer, paraissent se couper à angles droits.

Si par deux sections planes d'une surface de révolution on fait passer deux cônes, les droites qui joindront un point d'intersection des deux courbes aux sommets des deux cônes, étant vues d'un foyer, sembleront être à angle droit.

Le cinquième paragraphe, intitulé: *Lignes focales des cônes circonscrits à une surface de révolution; intersection de deux cônes circonscrits*, contient onze théorèmes qui ont pour base la propriété des lignes focales d'un cône du second degré, démontrée dans la première partie du mémoire.

Voici quelques-uns de ces théorèmes :

Les deux droites menées du sommet d'un cône circonscrit à une surface de révolution aux deux foyers, sont les lignes focales de ce cône.

Tout plan mené par le foyer d'une surface de révolution la coupe suivant une conique qui a pour foyer celui de la surface, et pour directrice l'intersection du plan directeur de la surface par le plan de la courbe.

D'où l'on conclut que :

Dans toute section plane d'un cône droit, la somme ou la différence des distances du sommet du cône et d'un foyer de la courbe à un point quelconque de cette conique est constante.

Théorème qui fait partie d'un fort beau mémoire de M. *Quetelet*, sur les sections planes d'un cône droit.

Dans un cône du second degré on peut inscrire une infinité de surfaces de révolution du second degré; leurs foyers sont tous sur les deux lignes focales du cône.

Dans chaque nappe d'un cône du second degré on peut inscrire deux paraboloïdes de révolution; leurs axes sont parallèles aux deux lignes focales du cône.

Quand deux cônes sont circonscrits à une surface de révolution, le cône qui a pour base une de leurs courbes d'intersection et pour sommet un foyer de la surface, a pour lignes focales les deux droites menées de ce foyer aux sommets des deux cônes.

Ce théorème donne lieu à plusieurs corollaires.

Le sixième paragraphe, intitulé : *Propriétés relatives aux deux foyers d'une surface de révolution considérés simultanément ; et propriétés générales des cônes du second degré*, contient vingt-quatre théorèmes, parmi lesquels on distingue les suivans :

Deux plans menés respectivement par les deux foyers d'une surface de révolution et par une même tangente à la surface, font des angles égaux avec le plan tangent conduit par le point de contact de la tangente.

Si par les deux foyers d'une surface de révolution, on mène deux plans vecteurs passant par la droite d'intersection de deux plans tangens à la surface, ces deux plans vecteurs feront respectivement avec les deux plans tangens des angles égaux.

Si autour d'un point pris arbitrairement, on fait tourner une droite constamment tangente à une surface de révolution, la somme ou la différence des angles qu'elle fera avec les deux droites fixes, menées de ce point aux deux foyers de la surface, sera constante.

Les pieds des perpendiculaires abaissées d'un foyer d'une surface de révolution, sur les plans tangens à un cône circonscrit à la surface, sont sur un cercle.

La perpendiculaire abaissée du sommet du cône sur le plan de ce cercle, passe par le second foyer de la surface.

Si deux surfaces de révolution ellipsoïde et hyperboloïde à deux nappes ont mêmes foyers, de quelque point de l'espace qu'on les considère, leurs contours apparens paraîtront toujours se couper à angles droits.

D'où il résulte que :

Un ellipsoïde et un hyperboloïde de révolution qui ont mêmes foyers, peuvent être regardés comme les deux nappes de la surface, lieu des centres de courbure d'une certaine surface inconnue.

Les lignes de courbures sphériques de cette surface inconnue sont les développantes du cercle.

Les mêmes propriétés ont lieu à l'égard de deux parabo-

loïdes de révolution autour du même axe, qui ont même foyer, et dont les sommets sont situés de part et d'autre de ce foyer.

Les théorèmes de ce paragraphe relatifs aux surfaces de révolution, donnent lieu à des propriétés générales des cônes du second degré. Ainsi :

Dans tout cône du second degré, les plans menés respectivement par les deux lignes focales et par une même arête, font des angles égaux avec le plan tangent au cône suivant cette arête.

Dans tout cône du second degré, deux plans menés par les deux lignes focales, et se coupant suivant la droite d'intersection de deux plans tangens au cône, font respectivement avec ces deux plans tangens des angles égaux.

La somme ou la différence des angles que chaque arête d'un cône du second degré fait avec les deux lignes focales, est constante.

Les pieds des perpendiculaires abaissées d'un point d'une ligne focale d'un cône du second degré sur ses plans tangens, sont sur un cercle situé dans un plan perpendiculaire à la seconde ligne focale du cône.

Dans tout cône du second degré, le produit des sinus des angles que chaque plan tangent fait avec les deux lignes focales, est constant.

Le septième paragraphe, intitulé : *Problèmes sur les surfaces de révolution ; propriétés générales des tétraèdres*, contient quelques problèmes et huit propriétés générales des tétraèdres, dont voici quelques-unes :

Si par un point fixe O, on mène un plan passant par chaque arête d'un tétraèdre, puis par cette arête un second plan faisant avec une des faces du tétraèdre, qui se coupent suivant cette arête, un angle égal à celui que le premier plan fait avec l'autre face, les six plans ainsi menés par les six arêtes respectivement, se couperont en un même point O′ ;

Les pieds des perpendiculaires abaissées des deux points O, O′ sur les quatre faces du tétraèdre, seront huit points

situés sur une même sphère, ayant son centre au milieu des deux points O, O′.

Si le point O se meut sur un plan, le point O′ aura pour lieu géométrique une surface du troisième degré.

Si d'un point pris arbitrairement dans l'espace, on abaisse des perpendiculaires sur les quatre faces d'un tétraèdre, puis, que de chaque sommet on mène une perpendiculaire sur le plan déterminé par les pieds des perpendiculaires aux trois faces qui passent par ce sommet, ces quatre nouvelles perpendiculaires passeront par un même point.

Tous les paraboloïdes de révolution tangens aux quatre faces d'un tétraèdre, ont leurs foyers situés sur une surface du troisième degré.

D'où l'on conclut que :

Le point de l'espace qui jouit de la propriété, que les pieds des perpendiculaires abaissées de ce point sur les quatre faces d'un tétraèdre, soient dans un même plan, a pour lieu géométrique une surface du troisième degré.

Le paragraphe huit, intitulé : *Surfaces de révolution ayant un foyer commun; nouvelle manière de démontrer les propriétés des surfaces de révolution*, contient douze propositions dont plusieurs sont relatives aux propriétés de deux surfaces de révolution qui ont un foyer commun; on fait voir que ce foyer est toujours un centre d'homologie des deux surfaces. D'après cela, si une sphère a pour centre le foyer d'une surface de révolution, ce point est le centre d'homologie de ces deux surfaces. Ce théorème offre une seconde méthode facile pour démontrer les propriétés des surfaces de révolution; quelques propositions démontrées par ce moyen prouvent combien il offre de ressources.

Ce paragraphe est terminé par une note où se trouve cette proposition :

Deux coniques dont chacune est le lieu des foyers de l'autre, étant vues d'un point quelconque de l'espace, paraissent toujours se couper à angles droits.

IIIe PARTIE. — *Quelques propriétés générales des surfaces du second degré, et particulièrement des surfaces coniques; et construction des directions des lignes de courbure des surfaces du second degré.*

Cette troisième partie est divisée en deux paragraphes.

Dans le premier, on donne plusieurs propriétés des surfaces du second degré, dont il a été fait usage dans la seconde partie du mémoire.

Nous citerons les suivantes :

Quand on fait passer deux cônes par deux sections planes d'une surface du second degré, le plan polaire du sommet de l'un de ces cônes, par rapport à la surface, passe par le sommet de l'autre cône et par la droite d'intersection des plans des deux courbes.

Quand par deux sections planes d'une surface du second degré qui se coupent en un point, on fait passer deux cônes, les droites qui vont de ce point aux sommets des cônes, sont deux tangentes conjuguées de la surface.

Deux cônes circonscrits à une surface du second degré, se coupent suivant deux courbes planes dont les plans sont respectivement les plans polaires des sommets des deux cônes, qu'on peut faire passer par les courbes de contact des cônes circonscrits.

Quand deux cônes sont circonscrits à une surface du second degré, si leurs courbes d'intersection se coupent, les tangentes à ces courbes en un de leurs points d'intersection, sont deux tangentes conjuguées de la surface.

Deux cercles étant tracés sur un cône du second degré, toute arête du cône fait des angles égaux avec les deux cercles.

Le second paragraphe, intitulé : *Construction des directions des lignes de courbure d'une surface du second degré*, contient dix théorèmes, dont voici les plus importans :

Les tangentes aux lignes de courbure d'une surface du second degré en un point, sont les arêtes des deux cônes

qu'on peut faire passer par les deux cercles menés sur la surface par ce point.

Les tangentes aux lignes de courbure d'une surface du second degré en un point quelconque, divisent en deux également l'angle et le supplément de l'angle des tangentes aux deux sections circulaires de la surface menée par ce point.

C'est ce théorème qui donne la construction des directions des lignes de courbure d'une surface du second degré.

Les sections normales faites en un point d'une surface du second degré, suivant les tangentes aux deux sections circulaires menées par ce point, ont des rayons de courbure égaux.

Les tangentes aux deux sections circulaires d'un hyperboloïde à une nappe, menées par un point, font respectivement avec les deux génératrices de l'hyperboloïde, qui passent par ce point, des angles égaux.

Dans tout hyperboloïde à une nappe, le produit des sinus des angles que chaque génératrice fait avec les plans des sections circulaires est constant.

Tout plan mené par deux arêtes d'un cône du second degré, coupe les deux plans fixes auxquels sont parallèles les plans des sections circulaires du cône, suivant deux droites qui font respectivement avec les deux arêtes des angles égaux.

Tout plan tangent à un cône du second degré, fait avec les plans des sections circulaires deux angles, dont la somme ou la différence est constante.

Chaque arête d'un cône du second degré, fait avec les plans des sections circulaires, des angles, dont le produit des sinus est constant.

L'enveloppe des bases de tous les triangles sphériques qui ont l'angle au sommet commun et même surface, est une *conique sphérique*.

Chartres, le 14 décembre 1828.

Méthode pour reconnaître les nombres premiers ; par M. A.-S. De Montferrier, membre de la Société Royale académique des sciences, etc.

Soit A un nombre impair quelconque.

Si l'on prend $z = \frac{A-1}{2}$, le carré de z ajouté à A donnera pour résultat un carré parfait. En effet on a

$$A = 2z + 1 = (z+1)^2 - z^2,$$

d'où

$$A + z^2 = (z+1)^2$$

Cela posé, si le nombre A est premier, il n'y a que le carré de z qui, lui étant ajouté, puisse former un carré parfait, car si l'on avait un autre nombre m, tel qu'on eut :

$$A + m^2 = x^2.$$

On aurait aussi

$$A = x^2 - m^2 = (x+m)\ (x-m),$$

et il est évident que A ne serait pas un nombre premier.

Réciproquement, s'il n'y a que le carré de z qui, ajouté à A, forme un carré parfait, le nombre A est premier, car en supposant qu'il ne le fût pas, on aurait

$$A = x.y,$$

x et y étant des facteurs de A. Mais on peut toujours déterminer deux nombres m, n, tels qu'on ait

$$x = m + n, \quad y = m - n;$$

Car il ne faut que faire

$$m = \frac{x+y}{2}, \quad n = \frac{x-y}{2}$$

et, m et n seront des nombres entiers, puisque x et y sont des nombres impairs. On aurait donc alors,

$$A = (m+n)(m-n) = m^2 - n^2.$$

D'où

$$A + n^2 = m^2;$$

ce qui est contre l'hypothèse. Ainsi le nombre A ne pouvant avoir de facteurs, est nécessairement un nombre premier.

Donc, pour connaître si un nombre impair A est premier, il ne faut que lui ajouter successivement les carrés des nombres entiers depuis 1 jusqu'à $\frac{A-1}{2}$ et, si aucune des sommes, excepté la dernière, ne forme un carré, le nombre A est premier.

On ne doit aller que jusqu'à $\frac{A-1}{2}$; car il est évident que $\left(\frac{A-1}{2}\right)^2$ est le plus grand carré possible que l'on puisse ajouter à A pour en former un autre : la différence des carrés les plus proches

$$\left(\frac{A+3}{2}\right)^2, \quad \left(\frac{A+1}{2}\right)^2$$

étant $A + 2$.

Exemples de Calcul.

Trouver si 17 est un nombre premier.

CARRÉS.			SOMMES.
17	+	1 =	18
»		4	21
»		9	26
»		16	33
»		25	42
»		36	53
»		49	66
»		$64 = 8^2 = \left(\frac{17-1}{2}\right)^2$	»

Aucun des nombres résultans n'étant un carré, 17 est un nombre premier.

On peut rendre le calcul très-simple et très-facile en ajoutant successivement les différences des carrés qui forment la suite des nombres impairs 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, etc.,

Pour le nombre 39, par exemple, en aurait :

	DIFFÉRENCES.	SOMMES.
39 +	1 =	40
40 +	3 =	43
43 +	5 =	48
48 +	7 =	55
55 +	9 =	$64 = 8^2$

Il n'est pas besoin de poursuivre le calcul, et 39 n'est pas un nombre premier. En effet on a

$$64 - 39 = 25 \quad \text{ou} \quad 39 = 8^2 - 5^2 = (8 + 5)(8 - 5) = 13 \times 3.$$

Pour 51.

	DIFFÉRENCES.	SOMMES.
51 +	1 =	52
52 +	3 =	55
55 +	5 =	60
60 +	7 =	67
67 +	9 =	76
76 +	11 =	87
87 +	13 =	$100 = 10^2$

Donc $100 - 51 = 49$, d'où $51 = 10^2 - 7^2 = 17 \times 3$.

Pour 91

91 +	1 =	92
92 +	3 =	95
95 +	5 =	$100 = 10^2$

Donc $91 = 100 - 9 = 10^2 - 3^2 = 13 \times 7$.

Trouver trois nombres dont la somme soit égale au produit; par M. DE MONTFERRIER, de la société académique des sciences, etc.

Désignant par A, B, C ces trois nombres, nous devons avoir

$$A.B.C = A + B + C.$$

Or, une tangente pouvant représenter tous les nombres possibles depuis zéro jusqu'à l'infini, nous pouvons poser

$$A = \text{tang.}\, x', \qquad B = \text{tang.}\, x'', \qquad C = \text{tang.}\, x'''$$

et le problème se réduit a trouver les arcs x', x'', x'''; nous avons donc

$$\text{tang.}\, x' + \text{tang.}\, x'' + \text{tang.}\, x''' = \text{tang.}\, x'.\,\text{tang.}\, x''.\,\text{tang.}\, x'''$$

ou, ce qui est la même chose.

$$\frac{\sin.\, x'}{\cos.\, x'} + \frac{\sin.\, x''}{\cos.\, x''} + \frac{\sin.\, x'''}{\cos.\, x'''} = \frac{\sin.\, x' \sin.\, x'' \sin.\, x'''}{\cos.\, x' \cos.\, x'' \cos.\, x'''}.$$

Réduisant les trois termes du premier membre au même dénominateur et additionnant, cette dernière égalité devient

$$\frac{\sin.x'\cos.x''\cos.x''' + \sin.x''\cos.x'''\cos.x' + \sin.x'''\cos.x'\cos.x''}{\cos.x' \cos.x'' \cos.x'''}$$
$$= \frac{\sin.\, x' \sin.\, x'' \sin.\, x'''}{\cos.x' \cos.\, x'' \cos.\, x'''}.$$

D'où l'on tire

$$\sin.x'\cos.\,x''\cos.\,x''' + \sin.\,x''\cos.\,x'''\cos.\,x' + \sin.\,x'''\cos.\,x'\cos.\,x''$$
$$= \sin.\,x'\sin.\,x''\sin.\,x'''$$

égalité qui va nous faire connaître x', x'', x'''.

D'abord on a

$$\sin.x' \cos.x'' \cos.x''' = \frac{1}{2}\left[\sin.(x'+x'') - \sin.(x'-x'')\right].\cos.x''' =$$

$$\frac{1}{4}\left[\sin.(x'+x''+x''') + \sin.(x'+x''-x''') + \sin.(x'-x''+x''') - \sin.(-x'+x''+x''')\right]$$

et par suite

$$\sin.x' \cos.x'' \cos.x''' + \sin.x'' \cos.x''' \cos.x' + \sin.x''' \cos.x' \cos.x'' =$$

$$\frac{1}{4}\big[\sin(x'+x''+x''') + \sin.(x'+x''-x''') + \sin.(x'-x''+x''') - \sin.(-x'+x''+x''') +$$
$$\sin.(x''+x'''+x') + \sin.(x''+x'''-x') + \sin.(x''-x'''+x') - \sin.(-x''+x'''+x') +$$
$$\sin.(x'''+x'+x'') + \sin.(x'''+x'-x'') + \sin.(x'''-x'+x'') - \sin.(-x'''+x'+x'')\big]$$

$$= \frac{1}{4}[3\sin.(x'+x''+x''') + \sin.(x''+x'''-x') + \sin.(x'''+x'-x'') + \sin.(x'+x''-x''')]$$

faisant, pour abréger $x' + x'' + x''' = m$, nous aurons

$$x' + x'' - x''' = m - 2x''', \quad x' + x''' - x'' = m - 2x'', \quad x'' + x''' - x' = m - 2x'$$

et le second membre de la dernière égalité deviendra

$$\frac{1}{4}[3\sin.m + \sin.(m - 2x') + \sin.(m - 2x'') + \sin.(m - 2x''')] = \text{M}.$$

D'un autre côté, on a

$$\sin.x' \sin.x'' \sin.x''' = \frac{1}{2}\left[\cos.(x'-x'') - \cos.(x'+x'')\right]\sin.x''' =$$

$$\frac{1}{4}\left[\sin.(x'''+x'-x'') + \sin.(x'''+x''-x') - \sin.(x'+x''+x''') - \sin.(x'''-x'-x'')\right]$$

dont le second membre, à cause de

$$-\sin.(x''' - x' - x'') = -\sin.(-m + 2x''') = \sin.(m - 2x''')$$

peut prendre la forme

$$\frac{1}{4}[-\sin.m + \sin.(m - 2x') + \sin.(m - 2x'') + \sin.(m - 2x''')] = \text{N}.$$

Or, pour satisfaire aux conditions demandées, les deux quantités M, N devant être égales, nous avons

$$M - N = 4 \sin. m = o :$$

ainsi les arcs x', x'', x''' doivent être tels qu'on ait

$$\sin. (x' + x'' + x''') = o$$

mais π désignant la circonférence du cercle, et n étant égal à $\frac{1}{2}$ ou représentant un nombre entier quelconque, on a

$$\sin. n\pi = o$$

donc

$$x' + x'' + x''' = n\pi,$$

ainsi il existe un nombre infini de quantités qui peuvent résoudre le problème, car prenant à volonté deux arcs x', x'', le troisième sera donné par l'égalité

$$x''' = n\pi - x' - x''$$

et les tangentes de ces trois arcs seront les nombres demandés.

Soit, par exemple,

$$x' = 45^\circ$$
$$x'' = 71^\circ\ 33'\ 54'',2.$$

en prenant $n = \frac{1}{2}$ nous aurons

$$x''' = 180^\circ - (116^\circ\ 33'\ 54'',2) = 63^\circ\ 26'\ 5'',8$$

mais

$$\text{tang. } 45^\circ = 1$$
$$\text{tang. } (71^\circ\ 33'\ 54'',2) = 3$$
$$\text{tang. } (63^\circ\ 26'\ 5'',8) = 2$$

donc

$$1 + 3 + 2 = 1 . 3 . 2 = 6$$

Sur l'élimination d'une inconnue entre deux équations. Extrait d'une lettre de M. A. MEYER, attaché à l'école militaire de Bréda.

Je prends la liberté de vous communiquer une règle d'*élimination* que je crois générale et utile. Je dis utile, puisqu'elle me paraît plus expéditive qu'aucune de celles que je connais. J'ai eu l'idée de cette règle en réfléchissant aux opérations que l'on fait subir aux coefficiens des termes des deux équations entre lesquelles on élimine l'une des inconnues par la méthode du plus grand commun diviseur. Comme il est aisé de venir au même résultat en suivant la voie de l'induction, je me contenterai d'indiquer les opérations de ce nouveau genre d'élimination, en vous priant de bien vouloir les publier dans la *Correspondance*.

Nous supposons les deux équations, fonctions de x et de y, ordonnées selon les puissances décroissantes de x, de manière que les coefficiens de x soient des nombres ou des fonctions de y; les lettres qui représentent ces coefficiens auront des indices égaux aux exposans de x, en sorte que A_m, B_{m-1}, par exemple, sont respectivement les coefficiens de termes en x^m et x^{m-1}. Nous supposons, en outre, l'une de nos équations du quatrième degré par rapport à x, et l'autre du troisième; car on généralisera facilement.

Soient donc les équations :

$$\text{I.} \quad \ldots \quad A_4x^4 + A_3x^3 + A_2x^2 + A_1x^1 + A_0 = o,$$

$$\text{II} \quad \ldots\ldots \quad B_3x^3 + B_2x^2 + B_1x^1 + B_0 = o;$$

On disposera le calcul de la manière suivante :

$$(A_1B)\left\{\begin{array}{l}(1)\ A_4\ \ A_3\ \ A_2\ \ A_1\ \ A_0\\ (2)\ B_3\ \ B_2\ \ B_1\ \ B_0\end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{lcl}B_3A_3 - A_4B_2 &=& C_3\\ B_3A_2 - A_4B_1 &=& C_2\\ B_3A_1 - A_4B_0 &=& C_1\\ B_3A_0 &=& C_0\end{array}\right\}\ (3)$$

$$(C_1B)\left\{\begin{array}{l}(3)\ C_3\ \ C_2\ \ C_1\ \ C_0\\ (2)\ B_3\ \ B_2\ \ B_1\ \ B_0\end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{lcl}B_3C_2 - C_3B_2 &=& D_2\\ B_3C_1 - C_3B_1 &=& D_1\\ B_3C_0 - C_3B_0 &=& D_0\end{array}\right\}\ (4)$$

$$(B_1D)\left\{\begin{array}{l}(2)\ B_3\ \ B_2\ \ B_1\ \ B_0\\ (4)\ D_2\ \ D_1\ \ D_0\end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{lcl}D_2B_2 - B_3D_1 &=& E_2\\ D_2B_1 - B_3D_0 &=& E_1\\ D_2B_0 &=& E_0\end{array}\right\}\ (5)$$

$$(E_1D)\left\{\begin{array}{l}(5)\ E_2\ \ E_1\ \ E_0\\ (4)\ D_2\ \ D_1\ \ D_0\end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{lcl}D_2E_1 - E_2D_1 &=& F_1\\ D_2E_0 - E_2D_0 &=& F_0\end{array}\right\}\ (6)$$

$$(D_1F)\left\{\begin{array}{l}(4)\ D_2\ \ D_1\ \ D_0\\ (6)\ F_1\ \ F_0\end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{lcl}F_1D_1 - D_2F_0 &=& G_1\\ F_1D_0 &=& G_0\end{array}\right\}\ (7)$$

$$(G_1F)\left\{\begin{array}{l}(7)\ G_1\ \ G_0\\ (6)\ F_1\ \ F_0\end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{lcl}F_1G_0 - G_1F_0 &=& 0\end{array}\right\}\ (8)$$

Explication. Après avoir placé les coefficiens des deux équations comme le représentent (1) et (2), on multipliera chacun des coefficiens (1) par B_3, le premier coefficient, ou A_4, excepté ; on écrira ces produits l'un au-dessous de l'autre, et on en retranchera successivement les produits de A_4 par chacun des coefficiens de (2), le premier, ou B_3, excepté ; on égalera ces différences à une lettre C dont les indices sont respectivement ceux des coefficiens (1), le premier excepté : cela donnera les coefficiens (3).

On écrira, dans une seconde opération, les coefficiens (2) au-dessous des coefficiens (3), comme le représente l'opération (C_1B). Cette opération s'exécute d'ailleurs de la même manière

que celle (A_1B), c'est ainsi qu'on multipliera les coefficiens C qui suivent C_3, par B_3, et on retranchera de ces produits respectivement les produits du premier terme de (3) par les termes de (2) à commencer du second; on égalera ces différences à une quatrième lettre D, dont les indices sont respectivement ceux des coefficiens (3) à partir du second.

On écrira dans une troisième opération (B_1D), les coefficiens (4) au-dessous des coefficiens (2) et, en opérant de la même manière que précédemment, l'on obtiendra les coefficiens (5), et ainsi de suite. L'on parviendra enfin à une dernière opération (G_1F), qu'on reconnaîtra aux indices 1 et *o* de ses coefficiens (7) et (6); en traitant ces coefficiens de la manière indiquée et égalant la différence à zéro, l'on aura l'*équation finale* (8) demandée.

Pour compléter cette explication, observons que,

1° Les coefficiens qui ont été placés en haut, ou dans la ligne supérieure d'une opération, ne paraissent plus dans les opérations suivantes; c'est ainsi que les coefficiens (1) de (A_1B), ne se trouvent plus dans les opérations (C_1B), (B_1D), etc. De même les coefficiens (2) de l'opération (B_1D) ne se montrent plus dans les suivantes; il en est de même des coefficiens C_1 D_1 E.

2° Les coefficiens de la ligne inférieure de chaque opération restent en bas jusqu'à ce que dans l'une des opérations suivantes, le nombre de ces coefficiens devienne égal à celui de la ligne supérieure; alors ces mêmes coefficiens se mettront sur la ligne supérieure dans l'opération qui vient immédiatement après. Ainsi les coefficiens (2) restent sur la ligne inférieure dans les opérations (A_1B), (C_1B), et se mettent en haut dans l'opération suivante (B_1D). Il en est de même pour les coefficiens (4) et (6).

Il reste une remarque à faire:

Lorsqu'il y a des termes qui manquent dans les équations proposées, on mettra zéro à la place de leurs coefficiens, puis on achèvera l'opération comme dans les cas ordinaires.

Il est superflu de dire qu'il faut avoir égard dans les multiplications et les soustractions successives aux signes des coefficiens. Je finirai par donner une application.

$x^3-(y+2)x^2+5yx+3-6y=o$; et $x^2-(y+2)x+2y=o$,

deviennent

$$A_3x^3+A_2x^2+A_1x^1+A_o=o;\ B_2x^2+B_1x+B_o=o,$$

en faisant

$A_3=1$, $A_2=-y-2$, $A_1=5y$, $A_o=3-6y$; $B_2=1$, $B_1=-y-2$, $B_o=2y$.

D'où :

$C_2=o$, $C_1=3y$, $C_o=3-6y$; $D_1=3y$, $D_o=3-6y$; $E_1=-3y^2-3$, $E_o=6y$,

l'équation finale est $D_1E_o-E_1D_o=o$, ou $2y^3-y^2-1=o$.

Je dois remarquer que la règle que nous donnons n'est pas exempte de l'inconvénient d'introduire des facteurs étrangers à la solution, et de rendre l'équation finale d'un degré plus élevé qu'il ne faut. Si par exemple nous avions cherché l'équation finale précédente par la méthode du plus grand commun diviseur, sans rendre entiers les quotiens de chaque division successive (ce qui, en effet, n'est pas nécessaire lorsqu'on applique cette méthode à l'élimination), nous aurions trouvé :

$$y^2-2y+1=o.$$

Si l'on veut avoir le plus grand commun diviseur, c'est-à-dire le dernier diviseur lui-même, on le formera facilement en observant que les coefficiens qui entrent dans ce diviseur sont précisément les coefficiens de la ligne inférieure, qui dans la dernière opération donnent l'équation finale. Ainsi, dans l'opération (G_1F), F_1, F_o, étant ces coefficiens, on aura F_1x+F_o pour le dernier diviseur, ou $x=\frac{F_o}{F_1}$ pour la valeur de x exprimée en y, qui, dans les équations I, II, est donnée par l'équation finale (8).

Bréda, le 30 janvier 1829.

Trouver l'équation de la surface touchée constamment par un plan rectangulaire qui glisse le long d'un axe sur un autre plan rectangulaire à cet axe, de manière que la droite perpendiculaire abaissée sur l'intersection des deux plans, du point où l'axe est touché par le plan mobile, conserve une longueur constante et égale à D; par M. Éd. Le François, Instituteur à Bruges (1).

Prenons l'axe donné et le plan qui lui est perpendiculaire pour l'axe des z et le plan des xy; et soient c l'ordonnée du point où la droite D rencontre l'axe des z, et a, b les coordonnées du point où elle touche le plan des xy. On aura pour l'expression de sa longueur $a^2+b^2+c^2=\mathrm{D}^2$ . . . . (1)

Un plan mené par l'axe des z et par la droite D aura pour équation

$$ay-bx=o \quad . \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad (2)$$

et. . $(a^2+b^2)z+acx+bcy-c(a^2+b^2)=o.$ . . . (3)

sera celle d'un autre plan passant par la même droite perpendiculairement au premier. Ce dernier plan sera évidemment le plan mobile dont il s'agit. Si ce plan se meut d'une quantité infiniment petite et dans une direction quelconque, les quantités a, b, c qui déterminent sa position varieront; les coordonnées x, y, z, au contraire, resteront constantes et appartiendront à l'intersection des deux plans infiniment voisins. Or, parce que les coordonnées a et b sont liées par l'équation (2), on ne pourra faire varier la fonction z que d'une seule manière, et si pour simplifier les opérations, on élimine d'abord b entre (1), (2) et (3), on aura à rechercher les différentielles totales des équations résultantes :

---

(1) Voyez, dans le numéro précédent, une solution du même problème; l'indétermination que l'auteur a cru y remarquer, tient à ce qu'il n'a point fait usage de toutes les équations que lui fournissait l'énoncé. A. Q.

$$a^2(x^2+y^2)+c^2x^2=D^2x^2,\ldots(A)\quad \text{et}\quad az+cx-ac=o.\ (B)$$

ces différentielles seront

$$a(x^2+y^2)\,da+cx^2dc=o,\quad (x-a)\,dc+(z-c)\,da=o,$$

d'où l'on tire par l'élimination du rapport $\frac{dc}{da}$,

$$c^2x^2-(a^2-ax)(x^2+y^2)-czx^2\ldots\ldots(C).$$

Les équations (A), (B) et (C) appartenant toutes trois au lieu cherché, mais étant particularisées par la présence de a et c, si l'on en élimine ces quantités, le résultat sera évidemment l'équation du lieu. Ajoutant donc les relations (B) et (C), après les avoir multipliées respectivement par cx^2 et a, il vient, à cause de (A), $a^3u=D^2x^3$, d'où $a=\frac{D^{\frac{2}{3}}x}{u^{\frac{1}{3}}}$, en représentant, pour abréger, x^2+y^2 par u. Cette valeur de a reportée dans (B), donne $c=\frac{D^{\frac{1}{3}}z}{D^{\frac{2}{3}}-u^{\frac{1}{3}}}$; substituant (A), on obtient

$$D^{\frac{4}{3}}u^{\frac{1}{3}}=D^{\frac{4}{3}}\left(\frac{D^{\frac{2}{3}}(D^{\frac{2}{3}}-u^{\frac{1}{3}})^2-z^2}{(D^{\frac{2}{3}}-u^{\frac{1}{3}})^2}\right)$$

ou $\quad (D^{\frac{2}{3}}-u^{\frac{1}{3}})^3=z^2,\qquad$ d'où $\quad u^{\frac{1}{3}}+z^{\frac{2}{3}}=D^{\frac{2}{3}},$

ou enfin $\qquad z^{\frac{1}{3}}+(x^2+y^2)^{\frac{2}{3}}=D^{\frac{2}{3}}.$

Le calcul intégral fournit une solution très-simple de cette question. Comme la surface engendrée est de révolution autour de l'axe des z, ses sections perpendiculaires à cet axe seront des cercles d'un rayon variable. Faisant donc $x^2+y^2=u^2$, et $a^2+b^2=t^2$, il vient d'abord $c^2+t^2=D^2$; d'ailleurs le

plan tangent étant toujours perpendiculaire pour un point quelconque à un autre plan passant par l'axe des z et par ce point, son inclinaison sera déterminée par $\frac{dz}{du}=\frac{c}{t}=\frac{c}{\sqrt{D^2-c^2}}$; de plus, comme on peut s'en assurer, $C=z-mu$, en faisant $dz=m$, d'où, toute réduction faite,

$$z-mu-\frac{Dm}{\sqrt{1+m^2}}=o,$$

et cette équation a pour intégrale complète $z-cu-\frac{Dc}{\sqrt{1+c^2}}=o$, c étant une constante arbitraire. Si l'on différencie cette dernière par rapport aux trois quantités z, u et c, et qu'on égale à zéro le coefficient de dc, pour en obtenir les valeurs de c correspondantes aux solutions particulières, il vient

$$u^2(1+c^2)^3=D^2, \quad \text{d'où} \quad c=\sqrt{\left(\frac{D^{\frac{2}{3}}-u^{\frac{2}{3}}}{u^{\frac{2}{3}}}\right)}$$

et cette valeur reportée dans l'intégrale complète donne, tous calculs faits, et après la substitution de $\sqrt{x^2+y^2}$ au lieu de u, $z^{\frac{2}{3}}+(x^2+y^2)^{\frac{1}{3}}=D^{\frac{2}{3}}$. Cette équation ne pouvant se déduire de l'intégrale complète par aucune valeur particulière de c, il s'ensuit que la relation cherchée est une solution particulière de

$$z-c(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}-\frac{Dc}{\sqrt{1+c^2}}=o.$$

Bruges, février 1829

Sur les propriétés des centres des moyennes distances des points d'application de plusieurs forces; par M. Chasles, ancien élève de l'École Polytechnique.

Quand plusieurs forces sollicitent un corps solide libre, on

sait qu'on peut les remplacer d'une infinité de manières par un système équivalent de deux ou d'un plus grand nombre de forces.

Ces divers systèmes jouissent de la propriété suivante :

La droite qui joint le centre des moyennes distances des points d'application des forces de chaque système au centre des moyennes distances des extrémités de ces forces est toujours parallèle à un axe fixe, et la longueur de cette droite est en raison inverse du nombre des forces.

Cet axe fixe est la résultante de toutes les forces primitives transportées parallèlement à elles-mêmes en un même point de l'espace.

En effet, la distance à un plan fixe du centre des moyennes distances des points d'application des forces est égale à la somme des distances à ce plan, de ces points d'application, divisée par le nombre des forces; pareillement la distance au même plan, du centre des moyennes distances des extrémités des forces est égale à la somme des distances à ce plan, de toutes ces extrémités divisée par le nombre des forces; la différence des distances à ce plan, des deux centres des moyennes distances, c'est-à-dire la projection orthogonale de la droite qui joint ces deux centres, sur un axe perpendiculaire au plan, est donc égale à la somme des projections sur cet axe des droites qui représentent les forces, divisée par le nombre de ces forces.

Or, quand la projection d'une droite sur un axe *quelconque* est égale à la somme des projections de plusieurs forces sur cet axe, on sait que cette droite est égale et parallèle à la résultante de toutes ces forces transportées parallèlement à elles-mêmes en un même point; d'où l'on conclut que la droite qui joint le centre des moyennes distances des points d'application des diverses forces au centre des moyennes distances de leurs extrémités, est égale à la résultante de ces forces transportées en un même point, divisée par le nombre des forces.

Mais, quel que soit le système de forces par lequel on remplace les forces proposées, la résultante de ces nouvelles forces, transportées en un même point, sera, comme on sait, toujours

égale et parallèle à la résultante des forces proposées; la droite qui joindra le centre des moyennes distances de leurs points d'application au centre des moyennes distances de leurs extrémités, sera donc parallèle à cette première résultante, et égale au quotient de cette résultante par le nombre des forces du nouveau système; ce qui démontre le théorème énoncé.

Ainsi, de quelque manière qu'on réduise à deux forces un système de plusieurs forces appliquées à divers points d'un corps solide libre, la droite qui joindra le milieu des deux points d'application de ces deux forces au milieu de leurs extrémités, sera égale et parallèle à une droite fixe, quel que soit, parmi tous les systèmes de deux forces équivalentes, celui qu'on considère.

Corollaire I. Si toutes les forces sont appliquées à un même point, on en conclut que :

Quand plusieurs forces sont appliquées à un même point, le centre des moyennes distances de leurs extrémités se trouve sur la résultante de toutes ces forces, à une distance du point d'application égale au quotient de cette résultante par le nombre des forces.

Cette proposition énoncée, je crois, pour la première fois, par M. *Gérono*, a été démontrée par plusieurs géomètres (*Annales de Mathématiques*, t. 16, p. 30.).

Corollaire II. On conclut encore du théorème ci-dessus que :

Quand plusieurs forces appliquées à différens points d'un corps solide libre se font équilibre, le centre des moyennes distances de leurs points d'application se confond avec le centre des moyennes distances de leurs extrémités.

Car la résultante de toutes ces forces transportées parallèlement à elles-mêmes en un même point, sera nulle.

Chartrés, le 12 février 1829.

Sur les lignes dirimantes à deux foyers conjugués; par A. QUETELET.

J'ai fait voir dans le cahier précédent de la *Correspondance*, que les lignes qui ont deux foyers conjugués, tels que les rayons émanés de l'un de ces foyers sont réfractés ou réfléchis vers le second, peuvent être exprimées par une équation polaire extrêmement simple; ces lignes ont reçu de quelques physiciens le nom de *lignes aplanétiques*, à cause de la propriété dont elles jouissent (1). J'ai énoncé de plus, que ces lignes ont une autre propriété non moins curieuse, c'est d'être les développantes des caustiques du cercle : et le point rayonnant se trouve alors à l'un des foyers.

Quelques personnes ayant bien voulu exprimer le désir de voir les démonstrations de ces théorèmes, que je m'étais borné à énoncer, parce qu'ils ne tarderont pas à paraître dans le V[e] volume des *Mémoires de l'Académie* de Bruxelles, avec tous les développemens nécessaires, je m'empresse de les consigner ici, en y joignant plusieurs recherches nouvelles sur les lignes aplanétiques considérées par la théorie des projections.

I.

Soit F un point rayonnant et od une circonférence dirimante (*fig.* 1, *planc. III*); d'après les théorèmes que j'ai donnés sur les caustiques (2), la trajectoire orthognoale des rayons réfractés sera généralement une courbe composée de deux branches $a'b'$ et $a'b'$ qui enveloppent un cercle mobile $a'a'$, dont le centre parcourt la circonférence od, et dont le rayon oa', pour chacune de ses positions, est à la distance Fo, dans le rapport de la réfraction.

(1) Du mot grec πλανήτικος avec α privatif, c'est-à-dire sans aberration.

(2) Voyez le I[er] vol. de la *Correspondance mathématique*; les *Nouveaux Mémoires* de l'Académie de Bruxelles et les *Annales mathématiques*.

Or, il est évident, à cause de la position symétrique des points a' et a_1', par rapport au diamètre So, que la circonférence qui passera par F, a_1' et o, passera aussi par a', et que les deux cordes Sa' et Sa_1', tangentes au cercle mobile, seront aussi tangentes à la courbe qui les enveloppe.

De plus la corde $a'a_1'$ qui joint les deux points de contact, est perpendiculaire au diamètre So; et elle jouit de la propriété *de passer constamment par un même point* c *situé sur le diamètre des lignes aplanétiques*. En effet, puisque les sinus des angles Fot et $a_1'ot$ ou FSo et $a_1'So$, sont dans le rapport constant de la réfraction, on a :

$$n^2 = \frac{\overline{oF}^2}{\overline{o'a'_1}} = \frac{\overline{of}}{\overline{oe}}.$$

Mais à cause du parallèlisme des cordes, ce dernier rapport est aussi égal à $\frac{\overline{tF}}{\overline{tc}}$. Or, comme le premier rapport est constant, le dernier le sera aussi, et comme d'ailleurs $\overline{tF}$ est invariable, $\overline{tc}$ le sera également, et le point c se trouvera sur Ft indépendant de la position du cercle mobile. Cette propriété nous sera très-utile par la suite.

D'après notre construction, on a encore $\overline{ot}$ perpendiculaire à So; et conséquemment par la propriété du cercle, $\overline{ot}^2 = \overline{tF}.\overline{tF'}$; mais nous savons déjà que deux de ces trois quantités sont constantes; la troisième l'est donc également, et la circonférence qui passe toujours par les quatre points F, a_1', o et a', passera aussi constamment par le point F' et elle aura son centre sur la perpendiculaire qui partage en deux parties égales FF'. Cette circonférence joue un rôle important dans la théorie des courbes que nous considérons; nous voyons dès à présent qu'elle donne une construction très-simple des tangentes.

La similitude des triangles $F'ot$ et Fot donne $\frac{\overline{F'o}}{\overline{Fo}} = \frac{\overline{F't}}{\overline{ot}}$; ce dernier rapport est constant, le premier l'est donc aussi, et

par suite le rapport des sinus des angles F′S*o* et FS*o*, ou bien encore des angles F′*a*′*o* et F*a*′*o*, est également un rapport invariable ; d'où résulte que les rayons partis du point F′ se réfractent sur la courbe *a*′*b*′ dans des directions qui passent par F, si le rapport de la réfraction est constant et égal à celui des droites *t*F′ et *to*. Ces lignes *a*′*b*′, AB, etc., sont donc des *lignes aplanétiques*.

On remarquera que le cercle F′ F*o* coupe à la fois toutes les lignes aplanétiques qui ont pour foyers communs F et F′, et qui sont construites pour un même rapport de réfraction, dans des points pour lesquels tous les angles incidens sont égaux et conséquemment les angles de réfraction ; car ces angles ont pour mesures communes les mêmes arcs.

Ce qui précède n'établit pas seulement les théorèmes que j'avais énoncés dans mon premier article, mais fait connaître encore plusieurs propriétés que je n'avais pu indiquer. Je pense donc avoir suffisamment établi l'identité des *lignes aplanétiques* et des lignes qui sont les *développantes des caustiques* par réfraction ou par réflexion, pour le cercle éclairé par un point rayonnant.

II.

Je me propose de considérer dans ce qui va suivre, les courbes dont il a été question précédemment, comme les projections d'autres lignes qui méritent une attention particulière par les propriétés dont elles jouissent. Je commencerai par examiner le cas de la projection orthogonale.

Les lignes aplanétiques, *ou lignes dirimantes à deux foyers, peuvent être considérées comme les projections orthogonales de l'intersection de deux cônes de révolution du second degré, qui ont leurs axes perpendiculaires au plan des lignes aplanétiques ;*

Les deux foyers sont les projections orthogonales des sommets des deux cônes ;

En considérant l'angle que forment les génératrices de l'un des cônes avec l'axe, comme étant de 45° ; la tangente du même angle dans le second cône est réciproque à l'indice de la réfraction.

Ce résultat me semble intéressant parce qu'il répand un nouveau jour sur la nature des lignes aplanétiques, et qu'il peut conduire à différens théorèmes relatifs à la ligne de pénétration de deux cônes de révolution dont les axes sont parallèles. On peut le déduire du reste d'une manière très-simple de l'équation en coordonnées rectangulaires des lignes aplanétiques que j'ai donnée dans le *numéro* précédent; et sous ce rapport, il ne peut rien perdre de son intérêt. L'équation d'une section méridienne des surfaces aplanétiques est

$$[(z-z')^2+x^2]^{\frac{1}{2}}+[(z-z'')+x^2]^{\frac{1}{2}}n=r;$$

les deux foyers sont sur l'axe des Z, à des distances z' et z'' de l'origine, n est l'indice de la réfraction, et r est une constante qui dépend de n et de la distance des foyers. Or, l'équation précédente peut être écrite sous cette forme

$$\sqrt{x^2+(z-z')^2}=r-n\sqrt{x^2+z^2},$$

en supposant qu'un des foyers soit à l'origine, pour plus de simplicité; mais si l'on regarde chacun des membres de cette équation comme ayant été primitivement égal à une troisième coordonnée y, que l'élimination a fait disparaître, on aura les équations des deux cônes dont nous avons parlé plus haut :

$$\sqrt{x^2+(z-z')^2}=y, \quad \text{ou} \quad x^2+(z-z')^2=y^2 \ldots\ldots (1)$$
$$r-n\sqrt{x^2+z^2}=y, \quad \text{ou} \quad n^2(x^2+z^2)=(y-r)^2 \ldots\ldots (2)$$

Il sera facile de vérifier sur ces deux équations ce que nous avons énoncé précédemment; on remarquera de plus que l'un des cônes a son sommet dans le plan des x, z; tandis que le sommet de l'autre se trouve sur l'axe des y, à la distance r de ce même plan qui est aussi le plan des lignes aplanétiques.

On pourra remarquer encore, en éliminant x entre les équations (1) et (2), qu'on obtient une équation du second degré.

Ainsi *quand deux cônes de révolution dont les axes sont parallèles se pénètrent, la projection orthogonale de la ligne de pénétration, sur le plan des deux axes, est une section conique.*

Faisons maintenant différentes hypothèses sur la nature des constantes qui entrent dans les équations (1) et (2) :

1° Si $r=o$, les cônes que nous considérons ont tous deux leurs sommets dans le plan des x, z; nous avons vu (*tome V*, page 4), que la ligne aplanétique est dans ce cas une circonférence; d'où l'on déduit que *si deux cônes de révolution se pénètrent, quand ils ont leurs axes parallèles et leurs sommets situés dans un plan perpendiculaire aux axes, la projection orthogonale de la ligne de pénétration est, par rapport à ce même plan, une circonférence dans laquelle les sommets des deux cônes sont des pôles réciproques* (*).

2° A mesure que r varie, c'est-à-dire à mesure que le sommet du second cône se meut le long de l'axe des y, n ne variant pas, les lignes de pénétration changent et leurs projections orthogonales dans le plan des z, x donnent toutes les lignes aplanétiques qui ont des foyers communs, le rapport de la réfraction demeurant constant (*tome V*, page 2).

3° Dans le cas particulier où $r=z'$ qui est la distance des deux foyers, le sommet du second cône se trouve sur la surface du premier et la ligne aplanétique présente un nœud par l'union de ses deux branches (*tome V*, page 4).

4° Quand $n=-1$, ce qui est le cas de la réflexion, les deux cônes ont les génératrices respectivement parallèles; mais nous savons que dans ce cas les lignes aplanétiques sont des courbes du second degré; il est aisé de voir d'ailleurs que la projection dans le plan des y, z est une ligne droite : ainsi *deux cônes dont les axes et les génératrices sont respectivement parallèles se pénètrent selon des lignes* planes *dont la projection orthogonale*

(*) Ce théorème est général, quels que soient les angles que forment les génératrices avec les axes dans les deux cônes de révolution.

sur un plan perpendiculaire aux axes est une section conique qui a pour foyers les projections des sommets des deux cônes.

L'analogie peut porter à chercher maintenant comment se modifient les propriétés des sections coniques et des lignes aplanétiques en général, quand on considère sur deux cônes, les lignes dont elles sont les projections; on se trouve conduit à des remarques très-curieuses que j'abandonnerai à la sagacité du lecteur.

III.

Je vais montrer que la projection stéréographique conduit peut-être à des résultats plus piquans encore, parce qu'ils ouvrent un vaste champ à la théorie des polaires réciproques.

Concevons une sphère qui passe par le cercle *od* et qui ait son centre au point *t*; concevons de plus que l'œil soit placé à l'extrémité du diamètre perpendiculaire au plan du cercle, qui est aussi celui des lignes aplanétiques, on trouvera, d'après la théorie des projections que :

1° Les deux foyers F′ et F seront vus sur la sphère en deux points *f′* et *f*, et la droite *f′f* sera parallèle au diamètre qui passe par l'œil;

2° Le cercle F′F*o* sera vu selon un autre cercle *f′fo′* dont le plan passera constamment par *ff′*, qui a la droite $\varphi\varphi'$ pour ligne des pôles;

3° Ce même cercle *ff′o′* continuera à couper sur la sphère toutes les projections des lignes aplanétiques, et son plan contiendra conséquemment toutes les projections des parallèles *to*, *ca′*, FA, etc., qui joignent deux à deux les points d'intersection : il est évident de plus que, pour chaque position de ce plan, les projections formeront un faisceau de droites concourantes en un point situé dans le plan qui passe par l'œil parallèlement au plan des lignes aplanétiques;

4° D'une autre part, chacune des droites *a′c* qui compose un faisceau semblable, doit aller couper la droite *ff′* en un point *c′*, qui est sur le prolongement du rayon visuel qui passe par c; et comme ce point *c*, ainsi que l'œil et la droite *ff′* sont inva-

riables, toutes les droites ca' qui joignent, deux à deux, les points de contact du cercle mobile $a'o$, seront vues constamment dans le plan $ff'o'$, tournant autour de ff' comme charnière ; elles seront donc sur un cône dont le sommet se trouve en c' et dont la nature ne nous est pas encore connue. De même toutes les droites AF seront vues sur un autre cône qui a son sommet f sur ff', etc. ;

5° Les différens cônes que nous venons de considérer ont chacun leur sommet sur la droite ff', percent la sphère selon deux lignes qui sont les projections stéréographiques d'une courbe aplanétique, et s'appuient toutes sur une même ligne située dans le plan qui passe par l'œil parallèlement au plan des lignes aplanétiques. Cette base commune des cônes est une circonférence égale à od et dont l'œil occupe le centre ; car pour le cas où le cône doit avoir son sommet à l'infini, ce qui a lieu quand la ligne aplanétique considérée est le cercle od, on voit bien évidemment que le cône dégénère en cylindre droit, qui a ses génératrices rangées sur la circonférence od parallèlement au diamètre passant par l'œil.

Ainsi donc : 1° *La série des lignes aplanétiques, confocales et construites pour un même rapport de réfraction, étant projetées stéréographiquement sur une sphère, qui a pour grand cercle, le cercle diamètre de ces lignes, sont les courbes de pénétration d'une sphère par une série de cônes ;* 2° *ces cônes ont pour base commune un cercle dont l'œil occupe le centre, et leurs sommets sont sur une même perpendiculaire au plan de ce cercle ;* 3° *cette perpendiculaire perce la sphère en deux points, qui sont les projections des foyers communs des lignes aplanétiques ;* 4° *l'un de ces points est le sommet du cône dont la ligne de pénétration répond à l'épicycloïde, qui est la développante de la caustique par réflexion dans le cercle.* (Voyez page 4.)

Si l'on prend une ligne aplanétique en particulier, le cercle mobile dont elle est l'enveloppe, étant considéré sur la sphère, son plan passe constamment par le sommet du cône qui lui correspond, et le lieu des pôles de ce cercle sera ainsi une ligne plane ; de plus, cette ligne plane se trouve sur le cône de

révolution qui passe par la circonférence *od*, et qui a son sommet au point de vue, c'est donc une section conique. Les plans de toutes ces sections coniques passent tous par la même droite $\varphi\varphi'$ polaire réciproque de ff', qui est le lieu des sommets de tous les cônes.

En partant des propriétés qui viennent d'être exposées et en s'aidant de la considération des *lignes focales* (1), on peut parvenir à des résultats très-intéressans. C'est ce qu'on peut facilement comprendre par le peu que je viens d'ajouter à mon premier article sur les lignes à deux foyers qui embrassent les sections coniques comme cas particuliers. J'ajouterai que la théorie des lignes aplanétiques est presque la seule que l'on ait à considérer dans l'optique pratique, d'après l'*identité* que j'ai établie entre les courbes qui réfractent les rayons émanés d'un foyer dans des directions qui passent par un second foyer, et les courbes qui sont les développantes des caustiques par réflexion et par réfraction dans le cercle.

Sur les lignes dirimantes à deux foyers conjugués. (Extrait d'une lettre de M. Chasles, au rédacteur.)

.... Je reçois aujourd'hui le numéro de la *Correspondance* (2). Je viens d'y lire avec le plus grand plaisir le résultat de vos premières recherches, concernant la courbe sur laquelle doi-

---

(1) Voyez l'extrait d'un mémoire de M. *Chasles*, inséré dans ce cahier de la *Correspondance*.

(2) *Tome V*, n° 1. Voyez aussi l'article qui précède; j'avais communiqué à M. Chasles plusieurs résultats qui y sont contenus, bien persuadé que la théorie que j'ai tâché d'ébaucher, ne pourra que gagner en simplicité et en élégance en passant par ses mains. J'aurais fait un appel semblable à mon savant ami M. Dandelin, si je n'avais craint que le désir de m'obliger ne le détournât de ses autres occupations. A. Q.

vent se réfracter les rayons émanés d'un même point, pour se réunir en un deuxième point. Ce que vous m'aviez fait l'honneur de me marquer avait piqué vivement ma curiosité; et j'attendais avec impatience ce numéro de la *Correspondance*, pour être plus en état de vous parler d'un sujet aussi intéressant.

Ma première idée a été de recourir au théorème fondamental que vous avez donné sur la construction des caustiques considérées comme les développées des *caustiques secondaires* (1); et ce théorème m'avait fait voir, sur-le-champ, que la courbe en question est le lieu géométrique d'un point, dont les distances aux circonférences de deux cercles, sont entre elles dans un rapport constant; d'où résulte votre équation $\frac{\rho - a}{\rho' - b} = n$.

L'un des cercles peut se réduire à un point: le deuxième peut avoir son centre à l'infini, et se réduire à une droite : alors les distances de chaque point de la courbe à ce point et à cette droite sont entre elles dans un rapport constant; ce qui annonce que cette courbe est une conique ayant le point fini pour foyer, et la droite pour directrice.

Ainsi les sections coniques sont un cas particulier de vos courbes à deux foyers; cela fait présumer que ces courbes jouissent, ainsi que vous me l'aviez annoncé, de propriétés analogues à celles des coniques. Cette circonstance, en même temps qu'elle est très-heureuse, parce qu'elle peut guider dans l'étude de ces courbes, me paraît importante, parce qu'on n'avait pas encore, je crois, rapproché les propriétés des courbes du quatrième degré de celles des coniques.

Mais ce qui me paraît le plus piquant, c'est la propriété dont jouit la courbe en question d'être la trajectoire orthogonale des rayons réfractés sur la circonférence d'un cercle qui lui-même est un cas particulier de ces courbes; ce que vous exprimez par le théorème 7°, dont le 5° me semble être une conséquence.

Cette propriété caractéristique suffirait seule pour rendre ex-

---

(1) Ier vol. de la *Correspondance*.

trêmement curieuses et intéressantes les courbes à foyers conjugués.

Aussi je vous prierai, Monsieur, quand vous aurez un instant de libre, de vouloir bien me mettre sur la voie de la démonstration de cette belle proposition. Peut-être cela me suffira-t-il pour voir que les projections stéréographiques de ces courbes sur une sphère, sont les intersections de la sphère par des cônes du deuxième degré ayant des cercles pour bases sur un même plan.

J'ai trouvé la démonstration de votre troisième manière de considérer la courbe en question, comme la projection orthogonale de l'intersection de deux cônes de révolution, dont les axes sont les perpendiculaires au plan de la figure, élevées par les deux foyers, et dont les bases sont deux cercles tels que les distances de chaque point de la courbe aux circonférences de ces cercles sont entre elles dans un rapport constant.

Cette manière de considérer la courbe en question m'avait frappé par sa simplicité et son élégance ; elle peut être très-utile.

Elle donne deux constructions différentes de cette courbe :

L'une par les intersections de deux cercles de rayons variables, et ayant respectivement pour centres les deux foyers ; ces cercles représentent les projections des sections des cônes par des plans parallèles au plan de la figure. Je n'ai pas eu le temps de vérifier si cette construction ne pourrait pas être ramenée à celle de *Descartes* ou à celle de *Newton*.

Et l'autre par les intersections des arêtes des deux cônes.

Cette dernière construction fait voir que : Étant donnés deux cercles et un point C sur la droite qui joint leurs centres F, F′, (*fig.* 2) ; si, autour de ce point, on fait tourner une transversale qui rencontre les deux cercles respectivement aux points A, A′, les rayons FA, F′A′ se coupent en un point m, dont le lieu géométrique sera la courbe en question ; et la tangente à cette courbe au point m, passera par le point d'intersection θ des tangentes aux deux cercles en A et A′.

Mais cela peut se voir aussi sans qu'on ait besoin de considérer la courbe comme la projection de l'intersection de deux cônes de révolution.

Car on a

$$\frac{Am}{A'm}=\frac{\sin. A'}{\sin. A}, \quad \text{et} \quad \frac{\sin. A}{\sin. C}=\frac{CF}{FA}, \frac{\sin. A'}{\sin. C}=\frac{CF'}{F'A'},$$

d'où

$$\frac{Am}{A'm}=\frac{CF'}{F'A'}:\frac{CF}{FA}=\text{const.}, \quad \text{ou} \quad \frac{mF-FA}{mF'-F'A'}=\text{const.}$$

Ainsi le point m a pour lieu géométrique la courbe représentée par l'équation $\frac{\rho - a}{\rho' - b}=n$.

La tangente en m à cette courbe, passe par le point d'intersection des tangentes aux deux cercles en A et A'. Cela résulte d'un théorème de géométrie élémentaire que j'ai démontré sous forme de lemme dans le *Traité de géométrie à trois dimensions* de M. *Hachette*, et dont voici l'énoncé :

Étant données deux droites finies θa, $\theta a'$, et trois points en ligne droite C, F, F' (*fig.* 3); si, autour du premier, on fait tourner une transversale $\overline{cAA'}$ qui rencontre ces deux droites en A, et en A', les deux droites FA, FA' se couperont en un point m, dont le lieu géométrique sera une droite passant par le point de rencontre θ des deux droites proposées, et qui rencontrera la droite $\overline{cFF'}$ en un point O, tel que $\frac{ca.\ cF'}{ca'.\ cF}=\frac{Oa.\ OF'}{Oa'.OF}$.

Il est plus à propos de dire que ce théorème résulte de ce que la droite cFF' rencontre les côtés du quadrilatère $\theta AmA'$ et ses deux diagonales θm, AA' en six points qui sont en involution.

Quand le point C est un centre de similitude des deux cercles, on a $\frac{cF}{cF'}=\frac{FA}{F'A'}$, d'où il suit que $Am=A'm$, et la courbe, lieu géométrique du point m, est une conique lieu géométrique des centres des cercles tangens aux deux cercles proposés.

Il est facile de voir à *priori* que votre équation $\frac{\rho - a}{\rho' - b}=n$ appartient à la courbe dirimante telle que les rayons émanés

du point F se réfractent en F′. Car pour construire la normale en un point m d'une courbe exprimée par une équation entre deux rayons vecteurs Fm, F′m, il faut porter sur les deux rayons mF, mF′, à partir du point m des lignes égales aux fonctions primes de cette équation, par rapport aux deux rayons variables; et construire le parallélogramme sur ces deux lignes, la diagonale est la normale; et les sinus des angles que cette normale fait avec les deux rayons vecteurs sont, par conséquent, entre eux dans le rapport des deux fonctions primes; ici ces fonctions primes sont l'unité et $-n$, leur rapport est $-n$, ce qui prouve que l'un des rayons étant considéré comme incident, le second peut être considéré comme réfracté.

Chartres, le 6 mars 1829.

Théorie mathématique des courbes d'intersection apparente de deux lignes qui tournent avec rapidité autour de deux points fixes. (Question proposée dans le VIe numéro du IVe vol., et résolue par M. Le François, instituteur à Bruges.)

Si deux courbes, situées d'une manière quelconque dans l'espace, sont douées d'un mouvement rapide de rotation autour de deux points fixes, un observateur, placé convenablement, apercevra à travers l'espèce de gaze que forment les positions successives de leurs lignes, une impression plus forte, qui sera produite par la suite des intersections de ces courbes. On sentira que ce mode de rotation dans des plans non parallèles, sera, en général, en défaut pour les courbes à branches infinies. Aussi, pour rendre notre solution applicable à toute espèce de lignes, nous avons supposé leurs plans parallèles. Nous avons, de plus, pour simplifier les calculs, placé l'œil de l'observateur à une distance assez grande de ces plans, pour

qu'ils semblent se confondre. Ceci revenait évidemment à faire mouvoir deux courbes, situées dans un même plan, autour de deux points donnés dans ce plan. En sorte que les intersections apparentes des expériences seront pour nous des intersections réelles. Enfin, pour que le spectre engendré par ces intersections fût un, nous avons, d'après une observation de M. *Quetelet*, écrit que la vitesse angulaire de l'une des courbes était un multiple de la vitesse de l'autre (1).

Soient donc $F(x', y') = o$, $f(x'', y'') = o$, les équations de deux courbes tournant dans un même plan autour de deux points A et B, (*fig.* 4.), que je prendrai pour les origines respectives de leurs coordonnées; x', y', se rapportant à l'origine A; x'', y'' à B.

Je représenterai par a et b les angles que les axes des abscisses de ces courbes font avec la ligne AB des centres de rotation, dans leurs positions initiales AA', BB'; par α et β les angles que ces mêmes axes font avec la même ligne dans de nouvelles positions correspondantes quelconques AA'', BB''; et par δ et $m\delta$ les accroissemens des angles a et b de la première à la dernière position.

Si l'on veut actuellement rapporter les points de ces deux courbes à un même système de coordonnées, ayant pour axe des x la ligne des centres, et pour origine le milieu de leur distance $AB = 2m$, il suffira de combiner leurs équations avec ces formules bien connues

$$\left.\begin{aligned} x' &= (x+n)\cos.(a+\delta) - y\sin.(a+\delta) \\ y' &= (x+n)\sin.(a+\delta) + y\cos.(a+\delta) \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (A)$$

$$\left.\begin{aligned} x'' &= (x-n)\cos.(b+m\delta) - y\sin.(b+m\delta) \\ y'' &= (x-n)\sin\,(b+m\delta) + y\cos.(b+m\delta) \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (B);$$

les trois systèmes de coordonnées étant rectangulaires. Dans

---

(1) La note à laquelle l'auteur fait allusion, est de M. *Plateau*, qui lira sans doute avec intérêt les développemens auxquels a donné lieu la communication qu'il a bien voulu me faire. A. Q.

ces formules, $m\delta$ est un multiple quelconque de δ, de même signe que δ, tant que les courbes se meuvent dans le même sens; mais de signe contraire, si leur mouvement est opposé. La substitution de ces valeurs de x', y'., dans les deux équations précédentes, les changent en celles-ci :

$$F(x, y, \sin.\delta, \cos.\delta) = o\ ,\ f(x, y, \sin.m\delta, \cos.m\delta) = o \ldots (C)$$

D'ailleurs, à l'aide des formules trigonométriques, on parviendra toujours à

$$\sin.m\delta = \varphi(\sin.\delta, \cos.\delta),\quad \cos.m\delta = \varphi'(\sin.\delta, \cos.\delta);$$

Si donc ces courbes se croisent dans leurs mouvemens, et qu'on veuille obtenir l'équation de leurs lignes d'intersection, on aura à éliminer sin. δ, cos. δ, entre les fonctions (C), en observant que $\sin.^2\delta + \cos.^2\delta = 1$, $\dfrac{\sin.\delta}{\cos.\delta} = \text{tang.}\,\delta$.

Cette élimination devient d'autant plus difficile que m est plus grand. Le cas le plus simple est celui où les deux courbes, mises en mouvement sont égales, m étant l'unité.

Ier *Exemple*. Supposons deux cercles égaux, tournant à l'extrémité de deux diamètres constamment parallèles.

$$x'^2 + y'^2 - 2rx' = o\ ,\quad x''^2 + y''^2 - 2rx'' = o\ ,$$

étant les équations de ces cercles, on peut, à cause du parallélisme constant des axes AA', BB', supposer $a = o$, $b = o$. Ces modifications étant faites dans les formules (A) et (B), leur substitution dans les équations précédentes les changeront en

$$[(x+n)\cos.\delta - y\sin.\delta)]^2 + [(x+n)\sin.\delta + y\cos.\delta]^2 - 2z[(x+n)\cos.\delta - y\sin.\delta] = o,$$
$$[(x-n)\cos.\delta - y\sin.\delta)]^2 + [(x-n)\sin.\delta + y\cos.\delta]^2 - 2z[(x-n)\cos.\delta - y\sin.\delta] = o,$$

en effectuant les calculs, puis ajoutant et soustrayant successivement les résultats, il vient

$$n^2 + x^2 + y^2 - 2r(x\cos.\delta - y\sin.\delta) = o,\quad x - r\cos.\delta = o.$$

De la dernière équation on tire $\cos.\delta = \frac{x}{r}$, d'où

$$\sin.\delta = \frac{1}{r}\sqrt{r^2 - x^2};$$

ces valeurs substituées dans la première, donnent

$$n^2 - x^2 + y^2 + 2y\sqrt{r^2 - x^2} = o;$$

ou, en chassant le radical,

$$n^4 + x^4 + y^4 + 2n^2y^2 + 2x^2y^2 - 2n^2x^2 - 4r^2y^2 = o.$$

Ce résultat mis sous la forme

$$(x^2 + y^2 - n^2) \pm 2y\sqrt{r^2 - n^2} = o,$$

montre que les deux lignes d'intersection sont deux cercles égaux dont les centres sont situés sur l'axe des y, l'un au-dessus, l'autre au-dessous de l'axe des x et à une distance $\sqrt{z^2 - n^2}$ de cet axe. Ces deux cercles réels, si $z > n$, et imaginaires, si $r < n$, deviennent concentriques et égaux aux cercles donnés pour $r = n$. Ces résultats seraient facilement vérifiés par la géométrie élémentaire.

IIe *Exemple*. Si les lignes mobiles sont deux courbes du second degré données par l'équation $rx^2 + sy^2 - rs = o$, et se mouvant de manière que les grands axes demeurent constamment parallèles, on verra que l'équation des lignes d'intersection est

$$y^2(ry^2 - sx^2 + sn^2 - rs)(sy^2 - rx^2 + rn^2 - rs) + x^2[rs - (s+r)y^2]^2 = o,$$

et devient

$$y^2(b^2y^2 - a^2x^2 + a^2n^2 - a^2b^2)(a^2y^2 - b^2x^2 + b^2n^2 - a^2b^2)$$
$$+ x^2[a^2b^2 - (a^2 + b^2)y^2]^2 = o \dots. \text{(D)}$$

pour l'ellipse $a^2y^2 + b^2x^2 - a^2b^2 = o$, et

$$y^2(b^2y^2 + a^2x^2 - a^2n^2 - a^2b^2)(a^2y^2 + b^2x^2 - b^2n^2 + a^2b^2)$$
$$- x^2[a^2b^2 - (a^2 - b^2)y^2]^2 = o \dots. \text{(E)}$$

pour l'hyperbole $a^2y^2 - b^2x^2 + a^2b^2 = o$.

Si dans l'équation (D) $a = b$, elle devient

$$y^2 (y^2 - x^2 + n^2 - a^2)^2 + x^2 (a^2 - 2y^2)^2 = o,$$

et se décompose dans les quatre suivantes

$$y^2 = o, \quad x^2 = o, \quad (a^2 - 2y^2)^2 = o, \quad (y^2 - x^2 + n^2 - a^2)^2 = o.$$

Les deux premières indiquent les axes des x et des y; la troisième deux droites menées parallèlement à l'axe des x de part et d'autre de cet axe, et à une distance $\frac{1}{2} a\sqrt{2}$: enfin la quatrième représente deux hyperboles équilatères égales et concentriques, dont l'axe réel se confond avec celui des x, si $n^2 - a^2 > o$, et avec celui des y, dans le cas contraire, et qui se réduisent à leurs asymptotes, si $n = a$.

Dans l'hypothèse actuelle, les deux lignes mobiles sont deux cercles égaux, et le lieu de leurs intersections successives, cherché directement, se bornerait à deux points fixes, distincts, confondus ou imaginaires, suivant que $n < a$, $n = a$, ou $n > a$. Ainsi les lignes que fournit l'équation générale (D) dans le cas du cercle, doivent être considérées comme les limites des courbes d'intersection qu'on obtiendrait en employant des ellipses dont le grand axe approcherait de plus en plus d'être égal au petit supposé le même pour toutes.

Si dans l'équation (E), on fait de même $a = b$, elle devient

$$y^2 (x^2 + y^2 - n^2)^2 - a^4 (x^2 + y^2) = o,$$

ou

$$\rho^2 [\, s\, (\rho^2 - n^2) - a^2 \,] [\, s\, (\rho^2 - n^2) + a^2 \,] = o,$$

en la rapportant à des coordonnées polaires; ρ étant d'ailleurs le rayon vecteur correspondant à l'angle dont s est le sinus.

Ce résultat, toujours vérifié par $\rho^2 = o$, quel que soit s, montre que deux des valeurs du rayon vecteur sont toujours nulles : ce qui est naturel, puisque, comme nous le verrons tout à l'heure, l'origine se trouve en un point où la courbe forme un nœud.

Les deux autres facteurs égalés chacun à zéro, donnent

$$(F) \ldots \rho = \pm\sqrt{n^2 + \frac{a^2}{s}}, \quad (F') \ldots \rho = \pm\sqrt{n^2 - \frac{a^2}{s}}.$$

Le double signe de ρ permet de ne rechercher que la suite des valeurs du rayon vecteur correspondantes au signe positif de s; et l'on s'assurera sans peine que l'équation (F) représente une courbe à deux branches, qui, après avoir rencontré l'axe des y aux points $\rho = \pm\sqrt{n^2 + a^2}$, s'étend symétriquement de part et d'autre de cet axe, chaque branche se dirigeant continuellement vers celui des x qu'elles ont toutes deux pour asymptote. On trouvera encore que chaque branche a deux inflexions placées semblablement par rapport à l'axe des ordonnées.

On reconnaîtra de même que l'équation (F′) donne une courbe coupée par les deux axes en quatre parties, qui, partant deux à deux des points $\rho = \pm\sqrt{n^2 - a^2}$ de l'axe des ordonnées, s'étendent symétriquement de part et d'autre de cet axe en se rapprochant de l'origine avec laquelle les quatre branches coïncident lorsque $s = \frac{a^2}{n^2}$. Cette dernière courbe a en outre deux inflexions à l'origine.

D'après la description du cours de ces courbes, il est évident que leur ensemble formera la figure 5.

Je remarquerai encore qu'il existe une grande ressemblance entre la courbe (F) et la conchoïde de Nicomède dont l'équation est $\rho = n + \frac{a}{s}$, et qui se réduit comme elle à un cercle lorsque $a = o$.

IIIe *Exemple.* Si les lignes mobiles sont des droites, en les supposant confondues dans toutes leurs positions avec les axes AA′, BB′, leurs équations rapportées aux axes des x et des y s'obtiendront évidemment en faisant $y' = o, y'' = o$ dans les relations (A) et (B); mais on y parviendrait beaucoup plus promptement par la considération des angles au sommet des triangles

que ces droites font dans leurs positions successives. Car on aura (*fig.* 4)

$$\varphi = \beta - \alpha, \quad \varphi = b - a + m\delta - \delta; \text{ donc}$$

$$\text{tang.}\varphi = \frac{\text{tang. }\beta - \text{tang. }\alpha}{1 + \text{tang.}\alpha\,\text{tang.}\beta} = \frac{\text{tang. }(b-a) + \text{tang. }(m\delta - \delta)}{1 - \text{tang. }(b-a)\text{ tang. }(m\delta-\delta)};$$

d'ailleurs

$$\text{tang. }\alpha = \frac{y}{x+n},\ \text{tang. }\beta = \frac{y}{x-n},\ \text{tang. }(b-a) = c,\ \text{tang.}a = d;$$

$$\text{tang. }\delta = \text{tang. }(\alpha - a) = \frac{y - (x+n)\,d}{x + n + dy},$$

et les trois premières valeurs conduisent, toute substitution faite, à l'équation

$$(x^2 + y^2 - n^2)[c + \text{tang. }(m\delta - \delta)] - 2ny[1 - c\,\text{tang.}(m\delta - \delta)]\ldots \text{ (G)}$$

qui sera l'équation générale des lignes d'intersection de deux droites mobiles, pour une valeur entière quelconque de m. Soit $m = 1$, cette équation se réduit à

$$c\,(x^2 + y^2 - n^2) - 2ny = o$$

et représente le segment capable de l'angle φ, qui, dans l'hypothèse actuelle, est constant.

Soit encore $m = 2$, dans ce cas

$$\text{tang. }(m\delta - \delta) = \text{tang. }\delta = \frac{y - (x+n)\,d}{x + n + dy},$$

et l'équation (G) devient en faisant

$$x + n = x', \text{ d'où } x = x' - n, \text{ et } \frac{c - d}{1 + cd} = \text{A},$$

$$(x'^2 + y^2)(y + \text{A}x) - 4nx'y - 2n\text{A}(x'^2 - y^2) = o\ldots\ldots \text{(H)}.$$

C'est l'équation de la focale du cône, le nœud de la courbe se trouvant à l'origine des coordonnées, et son sommet sur l'axe

des abscisses à une distance $2n$ de cette origine. On trouvera, de même que l'inclinaison de l'asymptote sur le même axe, a pour tangente trigonométrique — A, qu'elle rencontre l'axe des ordonnées à une distance $y = -2nA$, qu'enfin la droite tangente au sommet de la courbe fait un angle dont A est la tangente trigonométrique. Cette droite et l'asymptote forment donc les côtés d'un triangle isocèle dont la base $= 4n$ passe par le nœud et le sommet de la courbe.

Lorsque $A = o$, l'asymptote se confond avec l'axe des x, et l'équation (II) représente un cercle traversé par une droite.

Si au contraire $A = \infty$, l'asymptote devient parallèle à l'axe des y et l'équation (H) se réduit à

$$(x' + y^2)^2 x' - 2p\,(x'^2 - y'^2) = o;$$

or, cette dernière condition rendant infinie l'ordonnée $y = 2nA$ du sommet du triangle précédent, ce triangle se transforme en deux droites perpendiculaires à l'axe des abscisses, et le cône dont il est la trace sur le plan des xy en un cylindre. Cette dernière équation est donc la focale du cylindre.

Quant à la position primitive du point mobile d'intersection, elle appartient évidemment à la courbe que ce point décrit par suite de cette position primitive, et ce point décrira toujours la même courbe tant qu'il sera placé primitivement sur l'un de ceux de cette courbe. Ainsi le point d'intersection primitive pourra être l'un de ceux du cercle $y(x^2 + y^2 - 4nx) = o$, lorsque $A = o$, et l'un de ceux de la focale du cylindre dans le cas où $A = \infty$. On voit d'après cela que les positions primitives, données par M. *Plateau* à ses droites mobiles, ne sont que des cas très-particuliers du cas général; et que du reste nos résultats sont parfaitement conformes à ceux de ses intéressantes expériences.

La remarque précédente sur la position primitive du point mobile nous a conduit à une propriété de la focale, d'où nous avons déduit fort simplement quelques générations de cette courbe. Leur exposé fera le sujet d'un second article.

Bruges, le 11 mars 1829.

Calcul approximatif de la population du royaume des Bays-Bas; par A. QUETELET.

Depuis plusieurs années, j'ai cru remarquer et j'ai tâché d'établir que l'estimation de notre population est de beaucoup inférieure à sa valeur réelle; je n'ai pas craint de revenir sur l'appréciation de cet élément, parce que je le regarde comme la base d'une bonne statistique. Aujourd'hui même que nous sommes à la veille de voir effectuer un dénombrement complet, je me hasarde de mettre en avant quelques nouvelles idées qui pourront offrir peut-être de l'intérêt aux observateurs qui n'ont pas la crainte de voir les sciences mathématiques aborder certaines questions de statistique, crainte qui est devenue presque puérile chez bien des gens.

Nous suivrons d'abord une méthode expéditive qui revient à peu près à celle qu'a proposée *La Place*. Supposons que la population du royaume soit entièrement inconnue, et que l'on n'ait de notions exactes que sur les nombres annuels des naissances, des décès et des mariages. Nous commencerons par former des hypothèses sur la grandeur de notre population; puis, en partant de ces différentes hypothèses, nous chercherons les rapports de la population aux naissances, aux décès et aux mariages. La comparaison de ces rapports avec ceux qui ont été obtenus dans les pays voisins, pourra nous conduire à un résultat approchant de celui que nous cherchons. Or, en faisant ces calculs, on trouve

	HABITANS PAR		
POPULATION PRÉSUMÉE.	100 NAISSANCES.	100 DÉCÈS.	100 MARIAGES.
5 000 000	2481	3517	11621
5 500 000	2729	3869	12783
6 000 000	2977	4221	13945
6 500 000	3225	4572	15108
7 000 000	3473	4929	16270

Nous avons employé dans ces calculs les moyennes pour 10 années, de 1814 à 1824, savoir 201565 naissances, 142160 décès et 43025 mariages.

On comptait pour

	100 NAISSANCES.	100 DÉCÈS.	100 MARIAGES.
En France. . .	3168 habit.	4000	13490
En Angleterre .	3534	5760	13333

Si nous nous considérons comme placés à peu près entre la France et l'Angleterre, nous trouverons que notre population devait s'élever pour l'époque dont il s'agit (1819 à 1820), à 6000000 ou 6500000 âmes environ, tandis qu'on n'en comptait que 5640000 (1). *L'estimation était donc au-dessous de sa valeur de* 500000 *âmes au moins*. Nous sommes loin sans doute d'admettre ce calcul comme rigoureusement exact, car la France et même l'Angleterre sont probablement dans le même cas que nous, et ont aussi une évaluation plus ou moins inexacte de leur population. Cette observation, du reste, ne donnerait queplus de poids à nos conjectures.

Nous allons reprendre maintenant notre calcul approximatif, en ayant recours à un élément qui ne paraît pas encore avoir été employé dans de semblables recherches, quoiqu'on puisse l'obtenir avec beaucoup de précision ; c'est le recensement annuel pour les milices.

On doit s'attendre à avoir cet élément avec d'autant plus de rigueur, que les lois sont plus sévères à l'égard de ceux qui négligent de se faire inscrire.

(1) *Mouvement de la population*, etc. Imprimerie de l'État 1827.

Les inscriptions pour la milice nationale ont produit les nombres suivans :

1er janvier	1819	67493 (1)
—	1820	58421
—	1821	63751
—	1822	60395
—	1823	58829
—	1824	61021
—	1825	59406
—	1826	60565
—	1827	58358
—	1828	58634
	Moyenne.	60687

On a donc compté annuellement dans notre royaume, terme moyen, 60687 jeunes gens qui étaient dans leur 19e année. Or, en faisant usage des tables de population que j'ai données, et dans lesquelles j'ai établi la distinction des sexes, on trouve qu'il faut compter, pour une population moyenne de 434686 âmes, 3822 jeunes gens de 19 ans; on voit donc par une simple proportion, que notre population devrait comprendre au delà de 6900000 âmes. D'après les tables de France, on obtient exactement le même résultat; notre estimation est donc loin d'être exagérée.

---

(1) Ces nombres annoncent une population qui a été stationnaire, peut-être même décroissante. Les petites inégalités qu'ils présentent s'expliquent assez bien si l'on considère que les années de paix et les années de guerre, celles surtout où l'on a fait de fortes levées, n'ont pas dû produire les mêmes nombres de naissances, sans tenir compte des autres circonstances qui influent sur la reproduction.

On pourra m'objecter que notre population n'est point stationnaire comme le supposent les tables de mortalité; je sens toute la force de cette objection, à laquelle j'avais cru d'abord pouvoir répondre en observant que les individus que j'ai considérés, sont nés et ont passé les années les plus critiques de leur enfance, dans un temps où la population était stationnaire, et que si la population est devenue très-croissante depuis 1815, les décès n'ont pas subi de variation bien sensible; en effet, je trouvais pour Bruxelles, par exemple, les moyennes annuelles :

Pour 10 ans avant 1813, 2930 décès.
Pour 5 ans avant 1829, 3058;

tandis que les naissances ont fourni les nombres suivans :

ANNÉES.	NAISSANCES.	ANNÉES.	NAISSANCES.
1807	2766	1816	3130
1808	2803	1817	2987
1809	2706	1818	2815
1810	2855	1819	3183
1811	2937	1820	3236
1812	2952	1821	3468
1813	2667	1822	3667
1814	2610	1823	3609
1815	3172	1824	3812

En 1828, on a compté 4117 naissances.

Mais en traitant la question par l'analise, je n'ai pas tardé à reconnaître mon erreur, et je suis parvenu à ce résultat assez curieux : *Si l'on cherche ce que devient un nombre donné d'individus après* m + n *années*, (m *indiquant les années pendant lesquelles la population a été stationnaire*, et n *celles pendant lesquelles la population a reçu un accroissement ou un*

décroissement déterminé), *on trouve que le nombre des survivans est le même, de quelque manière que les* m + n *années se soient succédé*. Ainsi, que notre population soit régulièrement croissante pendant dix années, puis stationnaire pendant vingt autres, ou que ces deux périodes se succèdent dans un ordre inverse, ou que même les années de ces périodes s'entremêlent, 10000 individus qui naîtraient actuellement, présenteraient le même nombre de survivans, quand les trente années seraient révolues. Les formules suivantes mettront ce résultat en évidence.

Soit A un certain nombre de naissances qui ont eu lieu dans une même année, et r l'accroissement de la population; l'accent au bas de la lettre indiquera l'année que nous considérons. Le nombre d'enfans A, sera réduit après un an à a_1, que nous trouverons dans les tables de mortalité, si la population est stationnaire; si elle est croissante, nous aurons:

La 1re année $a_1\,(1+r_1)$
2e — $a_2\,(1+r_1)\,(1+r_2)$
3e — $a_3\,(1+r_1)\,(1+r_2)\,(1+r_3)$
. . . .
ne — $a_n\,(1+r_1)\,(1+r_2)\,(1+r_3)\ldots\ldots(1+r_n)$

Il peut se trouver que tous les individus de même âge aient été atteints en même temps d'un même fléau, qui en ait fait succomber un certain nombre, dont le rapport à celui des survivans soit connu; il faudra alors faire entrer un ou plusieurs nouveaux facteurs dans la formule. L'exemple s'en présente dans les levées générales et particulièrement dans les temps de guerre. Nous aurions tenu compte de ce facteur, si nous avions pu obtenir les résultats du grand recensement qui a été fait après notre séparation de la France, quand on a pris les inscriptions de plusieurs classes qui avaient déjà tiré au sort sous le gouvernement précédent, et qui avaient été éclaircies par plusieurs années de désastres. En nommant

$\rho, \rho_1 \ldots \rho_s$ ces facteurs, on a définitivement la formule générale (1) :

$$a_n\ (1+r_1)\ (1+r_2)\ (1+r_3) \ldots \ldots\ (1+r_n)\ \rho,\ \rho_1 \ldots \rho_s.$$

Appliquons maintenant cette formule au cas que nous avons à considérer : a_n est le nombre des survivans après n années; il est donné par les tables de mortalité, quand on prend la population comme stationnaire, et on peut le déduire analitiquement de la formule de Lambert, généralisée par Duvillard,

$$a_n = \mathrm{A} \left(\frac{t-n}{t}\right)^2 - p \left\{ e^{-\frac{n}{k}} - e^{-\frac{n}{h}} \right\}$$

dans laquelle t désigne l'âge le plus avancé dans la table, e la base des logarithmes népériens; p, k et h, des constantes qu'on modifie pour chaque table en particulier (2). Ce nombre a_n est inconnu dans le cas actuel.

Nous supposerons que depuis notre séparation de la France, l'accroissement de notre population a été constant ; ce qui

---

(1) Il est facile de déduire de cette formule le résultat que j'ai énoncé plus haut. Je remarquerai encore que si l'on fait $\rho = \rho_1 = \rho_s = 1$; et que si, sur n années, on en suppose $n-2$ pendant lesquelles la population est demeurée stationnaire, on aura, en regardant le rapport r comme constant pour les deux autres années, mais positif pour l'une et négatif pour l'autre, $a_n\,(1-r^2)$;
mais cette quantité est moindre que a_n, valeur qu'on aurait pour une population stationnaire pendant n années consécutives : ainsi l'on voit que l'accroissement de population d'une année ne compense pas l'effet du décroissement de l'autre. *En général, après un nombre* n *d'années, une population sera plus nombreuse si elle a été constamment stationnaire, que si elle a été alternativement croissante et décroissante, quoique le rapport de l'accroissement ait été égal à celui du décroissement, et l'effet d'une année ne compensera pas celui de l'autre.* Ce qui au premier abord semble être un paradoxe.

(2) Lacroix, *Traité des probabilités*, page 181.

semble assez bien établi par les nombres donnés précédemment, et par les documens publiés par la *Commission* de statistique. En nommant m le nombre d'années écoulées depuis cette séparation, et en faisant les facteurs ρ, $\rho_1 \ldots \rho_s$ égaux à l'unité, la formule devient pour le cas que nous considérons :

$$60687 = a_{19} (1 + r)^m$$

a_{19} est l'inconnue du problème, c'est le nombre de jeunes gens de 19 ans qu'on aurait compté si l'accroissement de la population n'avait pas eu lieu. Cet accroissement, d'après ce que nous avons établi dans un autre Mémoire, était de 10982 sur un million d'habitans; il faut compter qu'il a duré pendant dix ans de 1814 à 1824, pour le nombre moyen des miliciens que nous considérons; ainsi nous aurons :

$$60687 = a_{19} (1 + 0{,}010982)^{10} ,$$

ou $$\log. a_{19} = \log. 60687 - 10 \log. 1{,}010982 ,$$

ce qui donne 54408, pour valeur de a_{19} ; c'est-à-dire, que si la population avait continué à être stationnaire comme avant 1814 et 1815, le nombre moyen des miliciens aurait été très-probablement 54408, au lieu de s'élever à 60687 ; et aurait correspondu dans ce cas même, pour l'année 1824, à une population de 6185000 âmes; ce qui s'accorde fort bien avec mes autres calculs et légitime de plus en plus mes conjectures.

Je pense qu'en général, à défaut d'un recensement complet de la population, qu'il sera toujours très-difficile d'obtenir avec une certaine exactitude, on pourrait employer avec succès la combinaison des élémens que présentent les registres de l'état-civil. L'inscription des décès par âges, aiderait à former des tables de mortalité susceptibles de précision, à l'aide desquelles on pourrait remonter à l'estimation de la population, en faisant à la fois usage des nombres annuels des naissances et des inscriptions pour la milice; je ne pense pas qu'on ait songé

jusqu'à présent à employer, pour une semblable évaluation, ce dernier élément; qu'on peut obtenir cependant avec beaucoup d'exactitude. Il est quelques autres élémens secondaires, dont on pourrait aussi se servir comme de moyens de vérification.

Correspondance et Annonces scientifiques.

Nous avons la satisfaction de pouvoir annoncer que les constructions de l'observatoire de Bruxelles seront entièrement achevées vers la fin de cette année, moyennant une nouvelle avance de 40000 florins (84656 fr.) que S. M. le Roi des Pays-Bas vient de faire. On sait que ce monument sera érigé de concert par le gouvernement et par la ville de Bruxelles.

— Nous apprenons que la lunette méridienne, l'un des principaux instrumens destinés à l'observatoire, sera terminée au commencement de mai prochain, selon les conventions faites entre notre gouvernement et le célèbre artiste *Gambey*. Le prix de cet instrument sera de 21500 francs. M. *Troughton* achève également les autres instrumens qui nous sont destinés, de sorte que nous avons l'espoir fondé que l'observatoire sera complétement organisé, lors de la grande exposition pour l'industrie, qui doit avoir lieu à Bruxelles en 1830.

— Les élégantes et vastes constructions du jardin d'horticulture sont entièrement achevée. Déjà le prix des actions qui ne s'élevait qu'à 500 fl., se trouve porté à 600. On ne tardera pas à reprendre les travaux du grand bâtiment, destiné à l'exposition des produits de l'industrie ; on assure que l'adjudication a été faite par la ville pour 400,000 francs.

— M. G. *Groetaers* de Bruxelles, vient d'être attaché à l'école royale militaire de Bréda, en qualité d'ingénieur, pour l'enseignement des mathématiques appliquées.

— M. *Lobatto* vient de publier son *Jaarboekje*, annuaire pour 1829; des circonstances indépendantes de sa volonté ont retardé cette année la publication de cet utile recueil. M. *Lobatto* vient

de faire paraître aussi à Amsterdam la seconde partie de sa traduction de l'*Astronomie élémentaire* de *A. Quetelet*, à laquelle il a ajouté des notes aussi intéressantes qu'instructives.

— Nous nous sommes bornés dans le *numéro* précédent à annoncer le titre de la *Géométrie perspective* de M. *B.-E. Cousinery*; maintenant que nous avons lu cet intéressant ouvrage, nous le recommandons à l'attention de nos lecteurs, qui y trouveront les problèmes ordinaires de la géométrie descriptive, résolus par une méthode nouvelle, qui n'est pas moins ingénieuse qu'élégante, et qui présente une grande généralité dans ses résultats.

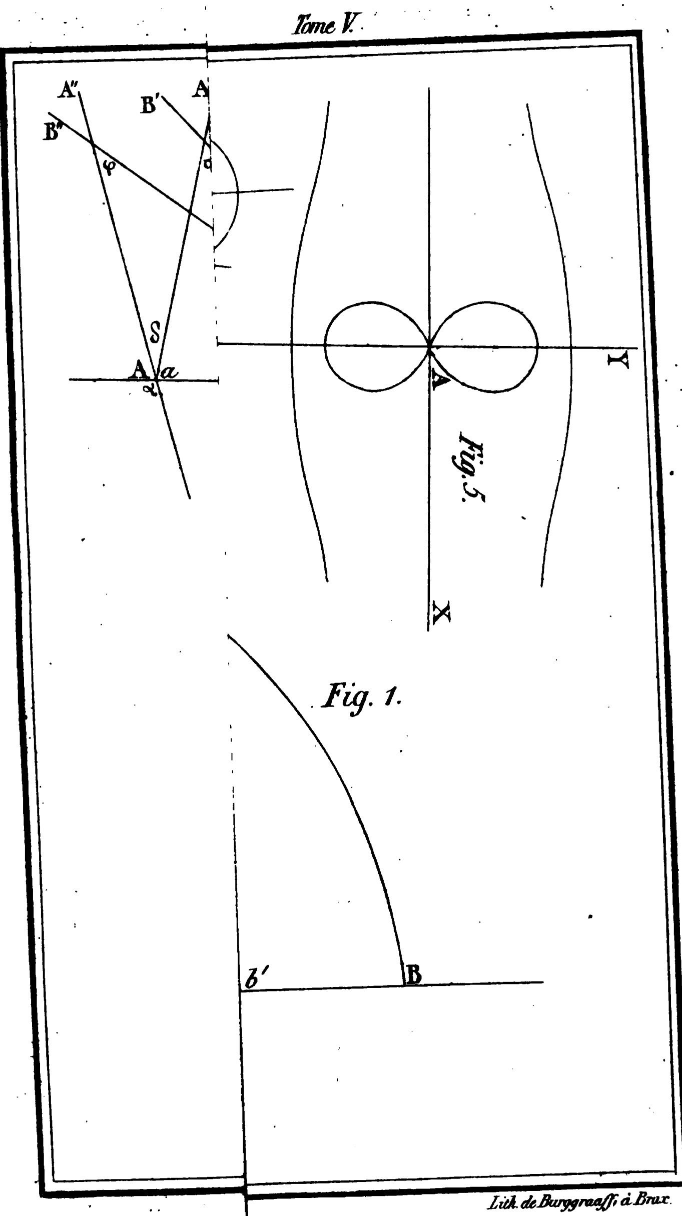
QUESTIONS.

I. Démontrer que l'on a généralement :

$$(1+x)^m = 1 + \cfrac{mx}{1 + \cfrac{\frac{(1-m)x}{2.1}}{1 + \cfrac{\frac{(1+m)x}{2.3}}{1 + \cfrac{\frac{(2-m)x}{2.3}}{1 + \cfrac{\frac{(2+m)x}{2.5}}{1 + \text{etc.}}}}}}$$

(Problème proposé par M. *De Montferrier*.)

II. La demeure d'un propriétaire, celle de son fermier et ses granges, ont leurs portes aux sommets d'un triangle dont les côtés valent respectivement 210, 200, 290 aunes (mètres). Le propriétaire veut joindre ces trois parties par trois chemins qui, pour les construire, coûteront 50 cents par aune carrée, la largeur de ces chemins devant être de 2 aunes. Il demande en quel point il faut établir le concours des trois chemins pour que le prix total de leur construction soit le moindre possible, et quel sera ce moindre prix? (M. *Noël* de Luxembourg.)



Lith. de Burggraaff, à Brux.

Mémoire sur les propriétés des diamètres conjugués des hyperboloïdes; par M. CHASLES, ancien élève de l'École Polytechnique.

(1) Les diamètres conjugués des surfaces du deuxième dégré jouissent de diverses propriétés relatives à leurs grandeurs, qui ont été découvertes successivement par divers géomètres.

M. *Livet*, alors répétiteur à l'École Polytechnique, est le premier qui se soit occupé de ces recherches. On lui doit les deux théorèmes généraux que voici :

« La somme des carrés de trois diamètres conjugués est con- » stante. »

« Le volume du parallélipipède, construit sur trois diamètres » conjugués, est constant. »

Ces deux théorèmes sont énoncés dans le 2e no du Ier vol. de la *Correspondance* de M. *Hachette* (ann. 1804), et démontrés dans le 13e cahier des *Journaux de l'École Polytechnique*, pag. 280 et suiv. (ann. 1806.)

M. *Binet* jeune a fait connaître ensuite cette troisième propriété des diamètres conjugués :

« La somme des carrés des faces du parallélipipède con- » struit sur trois diamètres conjugués, est constante. »

Ce théorème a été énoncé dans la *Correspondance* de M. *Hachette*, IIe vol., 4e no (ann. 1812), et démontré dans le 16e cahier des *Journaux de l'École Polytechnique*, p. 321 (ann. 1813).

A ces trois propositions, M. *Petit* a ajouté cette quatrième :

« La somme des carrés des projections de trois diamètres » conjugués d'un ellipsoïde sur une droite quelconque est constante. » (*Traité des surfaces du deuxième degré*, par M. *Hachette*, ann. 1813 et 1817.)

En démontrant ces quatre propositions, pour le cas particulier où la surface est un ellipsoïde (*Correspondance* de M. *Hachette*, IIIe vol., pag. 302 et suiv., ann. 1815), j'y ai ajouté plusieurs autres propriétés générales des diamètres rec-

tangulaires ou conjugués de l'ellipsoïde, dont quelques-unes, tout-à-fait du même genre que ces quatre premières, sont faciles à exprimer; par exemple, celles-ci :

« La somme des carrés des projections sur un plan donné des » faces du parallélipipède construit sur trois diamètres conju- » gués, est constante ; ces projections étant faites orthogonale- » ment, ou parallèlement au diamètre de la surface conjugué » au plan de projection. »

« Si l'on a deux systèmes de diamètres conjugués, le parallléli- » pipède construit sur trois quelconques de ces diamètres a » même volume que le parallélipipède construit sur les trois » autres diamètres. »

D'où se conclut, comme cas particulier, le second théorème de M. *Livet*.

De ces diverses propriétés des diamètres conjugués, les trois premières (celles de MM. *Livet* et *Binet* jeune), ont été démontrées dans plusieurs écrits sur les surfaces du second degré, et toutes trois ensemble, comme résultant de l'équation du troisième degré à laquelle on parvient en cherchant l'expression de la longueur des trois diamètres principaux d'une surface du second degré en fonction de trois diamètres conjugués. (Voyez *Géomét. à trois dimensions* de M. *Hachette*, pag. 165, ann. 1817).

Je ne sache pas qu'on ait ajouté quelque proposition à celle dont nous venons de parler.

Les trois premiers seulement de ces théorèmes ayant été démontrés pour un hyberboloïde comme pour un ellipsoïde; et celui de M. *Petit*, ainsi que ceux que nous-même avons donnés, n'ayant été démontrés que pour l'ellipsoïde, je me propose ici de les démontrer pour les hyperboloïdes.

Ces divers théorèmes résulteront tous de formules d'analise semblables, aux signes près, à celles dont je me suis servi pour le cas de l'ellipsoïde. (*Correspondance Polytechnique*, t. III, p. 302.)

Mais la marche que je vais suivre est tout-à-fait différente de celle que j'ai suivie alors, et offrira l'avantage de convenir aussi au cas de l'hyperboloïde, par le seul changement des signes dans les formules.

Démontrons d'abord les formules dont nous allons faire usage.

Lemme.

(2) Si, entre les neuf quantités $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma', \alpha'', \beta'', \gamma''$, on a les six équations

$$\left.\begin{aligned} \alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2 &= 1, \\ \alpha'^2 + \beta'^2 - \gamma'^2 &= 1, \\ \alpha''^2 + \beta''^2 - \gamma''^2 &= -1; \end{aligned}\right\} \ldots (a)$$

$$\left.\begin{aligned} \alpha\alpha' + \beta\beta' - \gamma\gamma' &= 0, \\ \alpha\alpha'' + \beta\beta'' - \gamma\gamma'' &= 0, \\ \alpha'\alpha'' + \beta'\beta'' - \gamma'\gamma'' &= 0; \end{aligned}\right\} \ldots (b)$$

on aura les quinze suivantes :

$$\left.\begin{aligned} \alpha^2 + \alpha'^2 - \alpha''^2 &= 1, \\ \beta^2 + \beta'^2 - \beta''^2 &= 1, \\ \gamma^2 + \gamma'^2 - \gamma''^2 &= -1; \end{aligned}\right\} \ldots (c)$$

$$\left.\begin{aligned} \alpha\beta + \alpha'\beta' - \alpha''\beta'' &= 0, \\ \alpha\gamma + \alpha'\gamma' - \alpha''\gamma'' &= 0, \\ \beta\gamma + \beta'\gamma' - \beta''\gamma'' &= 0; \end{aligned}\right\} \ldots (d)$$

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= \beta'\gamma'' - \beta''\gamma', \\ \beta &= \gamma'\alpha'' - \gamma''\alpha', \\ \gamma &= -(\alpha'\beta'' - \alpha''\beta'); \\ \alpha' &= \alpha''\gamma - \beta\gamma'', \\ \beta' &= \gamma''\alpha - \alpha''\gamma; \\ \gamma' &= -(\alpha''\beta - \beta''\alpha); \\ \alpha'' &= -(\beta\gamma' - \beta'\gamma), \\ \beta'' &= -(\gamma\alpha' - \gamma'\alpha), \\ \gamma'' &= \alpha\beta' - \alpha'\beta; \end{aligned}\right\} \ldots (e)$$

Commençons par démontrer les neuf dernières équations.

Pour cela, je tire des deux premières des équations (b) les valeurs de α et β; elles sont

$$\alpha = -\gamma.\frac{\beta'\gamma'' - \beta''\gamma'}{\alpha'\beta'' - \alpha''\beta'}, \qquad \beta = -\gamma.\frac{\gamma'\alpha'' - \gamma''\alpha'}{\alpha'\beta'' - \alpha''\beta'}.$$

Mettant ces valeurs dans la première des équations (a), on a

$$\gamma^2[(\beta'\gamma''-\beta''\gamma')^2+(\gamma'\alpha''-\gamma''\alpha')^2-(\alpha'\beta''-\alpha''\beta')^2]=(\alpha'\beta''-\alpha''\beta')^2,$$

ou,

$$\gamma^2[(\alpha'^2+\beta'^2-\gamma'^2)(\gamma''^2-\alpha''^2-\beta''^2)+(\alpha'\alpha''-\beta'\beta''-\gamma'\gamma'')^2]=(\alpha'\beta''-\alpha''\beta')^2.$$

Le premier membre, d'après les deuxième et troisième équations (a) et la troisième équation (b), se réduit à γ^2 : on a donc

$$\gamma^2 = (\alpha'\beta'' - \alpha''\beta')^2,$$

d'où

$$\gamma = \pm(\alpha'\beta'' - \alpha''\beta')$$

d'après cela, les expressions de α et β, que nous avons trouvées ci-dessus, deviennent

$$\alpha = \mp(\beta'\gamma'' - \beta''\gamma'),$$

$$\beta = \mp(\gamma'\alpha'' - \gamma''\alpha').$$

En prenant les signes inférieurs dans ces trois équations, on a les trois premières des équations (e). Les six autres s'en déduisent facilement. Pour avoir la quatrième, par exemple, il n'y a qu'à multiplier la troisème par β'', la seconde par γ'' et les retrancher ; on a

$$\beta''\gamma - \beta\gamma'' = \alpha'(\gamma''^2 - \beta''^2) + \alpha''(\beta'\beta'' - \gamma'\gamma''),$$

ou, à cause de la troisième équation (a), et de la troisième

équation (*b*),

$$\beta''\gamma - \beta\gamma'' = \alpha'(\alpha''^2 + 1) - \alpha'\alpha''^2 = \alpha',$$

ou

$$\alpha' = \beta''\gamma - \beta\gamma'';$$

c'est la quatrième des équations (*e*) ; les cinq autres se démontrent semblablement.

Maintenant, pour démontrer l'une des équations (*d*), la première, par exemple, il suffit d'y mettre à la place de β, β', β'', leurs expressions comprises dans les équations (*e*), car on obtient une équation identique.

Enfin, pour démontrer l'une des équations (*c*), la première, par exemple, j'observe qu'en vertu des équations (*e*), on a

$$\alpha^2 + \alpha'^2 - \alpha''^2 = \alpha^2 + \alpha'(\beta''\gamma - \beta\gamma'') + \alpha''(\beta\gamma' - \gamma\beta') =$$
$$\alpha^2 + \beta(\gamma'\alpha'' - \gamma''\alpha') + \gamma(\alpha'\beta'' - \alpha''\beta')$$

et d'après les valeurs de β et γ comprises dans les équations (*e*), le second membre devient

$$\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2;$$

cette quantité est égale à l'unité d'après la première des équations (*a*); on a donc

$$\alpha^2 + \alpha'^2 - \alpha''^2 = 1,$$

ce qui est la première des équations (*c*); on démontrera semblablement les deux autres.

Ainsi le lemme est démontré.

Ces formules, je crois, sont nouvelles.

Remarquons, que si l'on change

γ	en	$-\gamma\sqrt{-1}$,
γ'	en	$-\gamma'\sqrt{-1}$,
α''	en	$\alpha''\sqrt{-1}$,
et β''	en	$\beta''\sqrt{-1}$;

on obtient les formules de *Lagrange*, si connues et fréquemment employées (V. *Mécanique Analytique*, t. I, p. 267).

(3) Soit un hyperboloïde à une nappe; dans chaque système de trois diamètres conjugués, deux de ces diamètres rencontrent toujours la surface de l'hyperboloïde, et le troisième ne la rencontre jamais.

Cela est facile à voir; car si l'on conçoit le cône asymptotique de l'hyperboloïde, les deux surfaces auront mêmes systèmes de diamètres conjugués; mais dans tout système de diamètres conjugués d'un cône, deux de ces diamètres sont toujours au dehors de sa surface, et le troisième est toujours au dedans de la surface du cône; les deux premiers rencontreront donc toujours l'hyperboloïde et le troisième ne le rencontrera jamais.

Quant à l'hyperboloïde à deux nappes, comme il est enveloppé par son cône asymptotique, on conclut de ce que nous venons de dire que dans chaque système de diamètres conjugués de cet hyperboloïde, un seul diamètre le rencontre et les deux autres ne le rencontrent jamais.

Ainsi : *Dans tout système de diamètres conjugués d'un hyperboloïde à une nappe, deux de ces diamètres sont réels et le troisième est imaginaire;* et

Dans tout système de diamètres conjugués d'un hyperboloïde à deux nappes, un seul est réel, et les deux autres sont imaginaires.

(4) Pour éviter la considération de diamètres imaginaires qui ne peut offrir que des résultats d'analise et non de géométrie, et qui dès-lors ne peut satisfaire complétement l'esprit, nous considérerons ensemble deux hyperboloïdes l'un à une nappe et l'autre à deux nappes, ayant même cône asymptotique, et tels que les carrés de leurs diamètres qui ont même direction soient égaux et de signes contraires.

Ainsi, soit

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1,$$

l'équation du premier hyperboloïde, rapportée à ses trois axes

principaux ; l'équation du second hyperboloïde sera

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1;$$

et le cône asymptotique commun à ces deux hyperboloïdes, a pour équation :

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0.$$

Il est facile de vérifier que les deux hyperboloïdes ont mêmes systèmes de diamètres conjugués ; qu'un diamètre imaginaire dans l'un, est réel dans l'autre ; et que les carrés de ces diamètres sont égaux, aux signes près.

En effet, rapportons l'équation du premier hyperboloïde à trois nouveaux axes des x', y', z', faisant avec les axes des x, y, z, des angles dont les cosinus soient

l, m, n pour l'axe des x',
l', m', n' pour l'axe des y',
et l'', m'', n'' pour l'axe des z',

au moyen des formules de transformation de coordonnées

$$x = lx' + l'y' + l''z'$$
$$y = mx' + m'y' + m''z'$$
$$z = nx' + n'y' + n''z'.$$

Les conditions pour que ces trois nouveaux axes soient conjugués seront

$$\frac{ll'}{a^2}+\frac{mm'}{b^2}-\frac{nn'}{c^2}=0,$$
$$\frac{ll''}{a^2}+\frac{mm''}{b^2}-\frac{nn''}{c^2}=0,$$
$$\frac{l'l''}{a^2}+\frac{m'm''}{b^2}-\frac{n'n''}{c^2}=0;$$

et l'équation de l'hyperboloïde sera

$$\left(\frac{l^2}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}-\frac{n^2}{c^2}\right)x'^2+\left(\frac{l'^2}{a^2}+\frac{m'^2}{b^2}-\frac{n'^2}{c^2}\right)y'^2+\left(\frac{l''^2}{a^2}+\frac{m''^2}{b^2}-\frac{n''^2}{c^2}\right)z'^2=1.$$

Les trois équations de condition ci-dessus expriment aussi que les trois axes des x', y', z', sont conjugués par rapport au second hyperboloïde; ce qui fait voir que les deux hyperboloïdes ont mêmes systèmes de diamètres conjugués, ainsi que nous l'avons déjà dit.

L'équation du second hyperboloïde rapportée aux trois nouveaux axes est

$$\left(\frac{l^2}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}-\frac{n^2}{c^2}\right)x'^2+\left(\frac{l'^2}{a^2}+\frac{m'^2}{b^2}-\frac{n'^2}{c^2}\right)y'^2+\left(\frac{l''^2}{a^2}+\frac{m''^2}{b^2}-\frac{n''^2}{c^2}\right)z'^2=-1.$$

Les diamètres des deux surfaces dirigés suivant l'axe des x', ont, comme on voit, leurs carrés égaux et de signes contraires, de sorte que l'un de ces diamètres est réel et l'autre imaginaire; ce qu'il fallait prouver.

Nous dirons que ces deux hyperboloïdes sont *conjugués*.

Ainsi nous pouvons considérer chaque système de diamètres conjugués d'un hyperboloïde comme appartenant en même temps à cet hyperboloïde et à son *conjugué;* de cette manière ces trois diamètres sont toujours réels, et il n'est point question de diamètres imaginaires.

On voit dans le septième livre des coniques d'Apollonius, que pour démontrer dans l'hyperbole les deux belles propriétés des diamètres conjugués qui lui sont dues, ce grand géomètre considérait deux hyperboles *conjuguées;* ce qui lui permettait d'établir ses constructions géométriques sur des grandeurs toujours réelles.

(5) Soient

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1,$$

les équations de deux hyperboloïdes *conjugués*, rapportées à trois axes conjugués quelconques a, b, c.

Soient deux demi-diamètres r, r', menés à deux points de l'hyperboloïde à une nappe, et r'' un demi-diamètre mené à un point de l'hyperboloïde à deux nappes : soient α, β, γ; α', β', γ'; et α'', β'', γ'', les coordonnées des extrémités de ces trois diamètres, on aura

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\alpha^2}{a^2}+\dfrac{\beta^2}{b^2}-\dfrac{\gamma^2}{c^2}=1, \\ \dfrac{\alpha'^2}{a^2}+\dfrac{\beta'^2}{b^2}-\dfrac{\gamma'^2}{c^2}=1, \\ \dfrac{\alpha''^2}{a^2}+\dfrac{\beta''^2}{b^2}-\dfrac{\gamma''^2}{c^2}=-1. \end{array}\right\} \ldots\ldots (A)$$

Pour exprimer que les trois diamètres r, r', r'', sont conjugués, on pourrait faire usage des formules pour passer d'un système de coordonnées obliques à un autre système de coordonnées obliques; mais il est plus simple d'exprimer que si l'on circonscrit à l'un des hyperboloïdes un cône ayant son sommet sur l'un des trois diamètres, le plan de la courbe de contact sera parallèle au plan des deux autres diamètres; on trouve ainsi les trois conditions suivantes :

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\alpha\alpha'}{a^2}+\dfrac{\beta\beta'}{b^2}-\dfrac{\gamma\gamma'}{c^2}=0, \\ \dfrac{\alpha\alpha''}{a^2}+\dfrac{\beta\beta''}{b^2}-\dfrac{\gamma\gamma''}{c^2}=0, \\ \dfrac{\alpha'\alpha''}{a^2}+\dfrac{\beta'\beta''}{b^2}-\dfrac{\gamma'\gamma''}{c^2}=0.. \end{array}\right\} \ldots (B)$$

D'après le lemme que nous avons démontré, les six équations

(A) et (B) donnent les quinze suivantes :

$$\left.\begin{array}{l} \alpha^2 + \alpha'^2 - \alpha''^2 = a^2 \\ \beta^2 + \beta'^2 - \beta''^2 = b^2 \\ \gamma^2 + \gamma'^2 - \gamma''^2 = -c^2 \end{array}\right\} \ldots\ldots (C)$$

$$\left.\begin{array}{l} \alpha\beta + \alpha'\beta' - \alpha''\beta'' = o \\ \alpha\gamma + \alpha'\gamma' - \alpha''\gamma'' = o \\ \beta\gamma + \beta'\gamma' - \beta''\gamma'' = o \end{array}\right\} \ldots\ldots (D)$$

$$\left.\begin{array}{l} \alpha = \frac{a}{bc}(\beta'\gamma'' - \beta''\gamma'), \\ \beta = \frac{b}{ac}(\gamma'\alpha'' - \gamma''\alpha'), \\ \gamma = -\frac{c}{ab}(\alpha'\beta'' - \alpha''\beta'); \\ \alpha' = \frac{a}{bc}(\beta''\gamma - \beta\gamma''), \\ \beta' = \frac{b}{ac}(\gamma''\alpha - \gamma\alpha''), \\ \gamma' = -\frac{c}{ab}(\alpha''\beta - \alpha\beta''); \\ \alpha'' = -\frac{a}{bc}(\beta\gamma' - \gamma\beta'), \\ \beta'' = -\frac{b}{ac}(\gamma\alpha' - \alpha\gamma'), \\ \gamma'' = \frac{c}{ab}(\alpha\beta' - \alpha'\beta). \end{array}\right\} \ldots\ldots (E)$$

Il est extrêmement facile de conclure de ces équations les diverses propriétés des diamètres conjugués des hyperboloïdes.

(6) Les équations (C) font voir que :

Si, par les extrémités de trois demi-diamètres conjugués, on mène trois droites parallèles à un diamètre fixe et terminées au plan diamétral conjugué à ce diamètre, la somme des carrés des deux droites menées par les extrémités des diamètres appartenans à l'hyperboloïde à une nappe, moins le carré de la troisième droite, sera une quantité constante, quel que soit le système des trois diamètres conjugués;

Cette quantité constante sera égale au carré du demi-diamètre fixe, pris avec le signe + ou avec le signe —, suivant que ce diamètre aura son extrémité sur l'hyperboloïde à une nappe ou sur l'hyperboloïde à deux nappes.

(7) Si, de l'extrémité d'un diamètre, on abaisse une perpendiculaire sur le plan diamétral en question, sa longueur sera dans un rapport constant avec la droite menée de la même extrémité parallèlement au diamètre fixe, et terminée au plan diamétral ; le théorème précédent donne donc celui-ci :

Si, des extrémités de trois diamètres conjugués quelconques, on abaisse des perpendiculaires sur un plan diamétral fixe, la somme des carrés des deux perpendiculaires menées des extrémités situées sur l'hyperboloïde à une nappe, moins le carré de la troisième, sera une quantité constante.

Ou, en d'autres termes :

Si l'on projette orthogonalement sur un axe fixe trois diamètres conjugués, la somme des carrés des projections des deux diamètres appartenans à l'hyperboloïde à une nappe moins le carré de la projection du troisième, sera une quantité constante, quels que soient les trois diamètres conjugués.

(8) Si l'on fait les projections sur trois axes rectangulaires, la somme des carrés des projections d'un diamètre sera égale au carré de ce diamètre, d'où l'on conclut que :

Dans tout système de diamètres conjugués, la somme des carrés des deux qui appartiennent à l'hyperboloïde à une nappe moins le carré du troisième est une quantité constante.

(9) Si, par un point d'un hyperboloïde, on mène une corde parallèle à un diamètre, elle sera divisée en son milieu par

le plan diamétral conjugué à ce diamètre ; le théorème (*b*) donne donc celui-ci :

Si, par les extrémités de trois diamètres conjugués, on mène trois cordes parallèles à un axe fixe et terminées respectivement aux deux hyperboloïdes, la somme des carrés des deux cordes comprises dans l'hyperboloïde à une nappe moins le carré de la corde comprise dans l'hyperboloïde à deux nappes, sera une quantité constante, quels que soient les trois diamètres conjugués.

(10) Multiplions la première des équations (D) par $\sin.\widehat{x,y}$, on aura

$$\alpha\beta \sin.\widehat{x,y} + \alpha'\beta' \sin.\widehat{x,y} - \alpha''\beta'' \sin.\widehat{x,y} = o;$$

or, $\alpha\beta \sin.\widehat{x,y}$ exprime l'aire de la base sur le plan des xy du rhomboïde construit sur les directions des trois axes des x, y et z, et ayant pour diagonale le demi-diamètre r; les deux autres termes de l'équation ont des significations semblables ; cette équation prouve donc que :

Si, sur les directions de trois demi-diamètres conjugués fixes on construit trois rhomboïdes ayant respectivement pour diagonales trois autres demi-diamètres conjugués quelconques, les faces de ces trois rhomboïdes comprises dans le plan de deux des trois premiers diamètres seront telles que la somme des aires des deux premières, moins l'aire de la troisième, sera égale à zéro ; cette troisième appartenant au rhomboïde qui a pour diagonale le demi-diamètre de l'hyperboloïde à deux nappes.

(11) Multiplions par $\sin.\widehat{y,z}$ les deux membres de la première des équations (E), on a

$$bc\alpha \sin.\widehat{y,z} = a\,(\beta'\gamma'' - \beta''\gamma') \sin.\widehat{y,z}.$$

Or, $(\beta'\gamma'' - \beta''\gamma') \sin.\widehat{y,z}$ est la projection sur le plan des yz de l'aire du parallélogramme, construit sur les deux demi-diamètres r', r''; l'aire de ce parallélogramme est $r'r'' \sin.\widehat{r'r''}$ et sa pro-

jection a pour expression $r'r''$ sin. $\widehat{r'r''}$. $\frac{\sin.(x,r'r'')}{\sin\ (x,yz)}$; (sin.$(x,r'r'')$ exprime le sinus de l'angle que l'axe des x, parallèlement auquel se fait la projection, fait avec le plan des deux diamètres r',r'', et sin. (x,yz) exprime le sinus de l'angle que l'axe des x fait avec le plan des yz); on a donc

$$a \sin.\ (x,yz).\ b.c \sin.\ \widehat{y,z} = a \sin.\ (x,r'r'').\ r'.r''.\ \sin\ \widehat{r'r''}.$$

$b.c.$ sin. $\widehat{y,z}$ est l'aire du parallélogramme construit sur les deux demi-diamètres b,c dirigés suivant les axes des y et des z; a sin. (x,yz) est la perpendiculaire abaissée de l'extrémité du diamètre r sur le plan des yz; le premier membre de l'équation que nous venons d'écrire exprime donc le volume du rhomboïde construit par les trois demi-diamètres b, c, r; on voit pareillement que le second membre de l'équation exprime le volume du rhomboïde construit sur les trois demi-diamètres a,r', r''; on a donc le théorème :

Si l'on prend deux systèmes de diamètres conjugués, le rhomboïde construit sur deux demi-diamètres du premier système et un demi-diamètre du deuxième système, a même volume que le rhomboïde construit sur les trois autres demi-diamètres.

(12) Supposons un moment que les trois axes conjugués des x, y et z soient les trois axes principaux des deux hyperboloïdes; ils seront rectangulaires, et le volume du rhomboïde construit sur les trois demi-diamètres r, r', r'' aura pour expression

$$\alpha\,(\beta'\gamma''-\beta''\gamma')+\alpha'(\beta''\gamma-\beta\gamma'')+\alpha''(\beta\gamma'-\gamma\beta'),$$

(*Élémens de Géométrie à trois dimensions* de M. *Hachette*, p. 33).

En vertu des équations (E), cette expression devient

$$\frac{b.c}{a}\,(\alpha^2+\alpha'^2-\alpha''^2),$$

et se réduit, en vertu de la première des équations (C) à abc, ce qui prouve que :

Le volume du rhomboïde construit sur trois demi-diamètres conjugués quelconques est constant.

(13) D'après ce théorème et le précédent, on peut dire généralement que :

Étant pris deux systèmes de trois demi-diamètres conjugués, le rhomboïde construit sur trois quelconques de ces six demi-diamètres a même volume que le rhomboïde construit sur les trois autres.

(14) Continuons de supposer les trois axes coordonnés rectangulaires; et soit

$$Lx + My + Nz = o$$

l'équation d'un plan fixe quelconque P.

Le plan des deux diamètres r, r', a pour équation

$$(\beta\gamma' - \gamma\beta')\,x + (\gamma\alpha' - \alpha\gamma')\,y + (\alpha\beta' - \beta\alpha')\,z = o,$$

ou, en vertu des équations (E),

$$\frac{\alpha''}{a^2}x + \frac{\beta''}{b^2}y - \frac{\gamma''}{c^2}z = o.$$

Le cosinus de l'angle que ce plan fait avec le plan P est

$$\cos.\,(P,rr') = \frac{L\dfrac{\alpha''}{a^2} + M\dfrac{\beta''}{b^2} - N\dfrac{\gamma''}{c^2}}{\sqrt{L^2+M^2+N^2}\sqrt{\dfrac{\alpha''^2}{a^4} + \dfrac{\beta''^2}{b^4} + \dfrac{\gamma''^2}{c^4}}}$$

élevant au carré, et multipliant par $a^2b^2c^2$, il vient

$$\left(\frac{\alpha''^2}{a^2}b^2c^2 + \frac{\beta''^2}{b^2}a^2c^2 + \frac{\gamma''^2}{c^2}a^2b^2\right)\cos.^2(P,rr')$$

$$= \frac{a^2b^2c^2}{L^2+M^2+N^2}\left(L\frac{\alpha''}{a^2} + M\frac{\beta''}{b^2} - N\frac{\gamma''}{c^2}\right)^2.$$

Or, on a $\frac{\alpha''}{a}bc = \mathcal{C}'\gamma - \gamma'\mathcal{C}$, (équations E), et cette seconde expression est la projection orthogonale sur le plan des yz du parallélogramme construit sur les deux diamètres, r, r'; ainsi cette projection est égale à $\frac{\alpha''}{a}bc$; pareillement $\frac{\mathcal{C}''}{b}ac$ et $\frac{\gamma''}{c}ab$ expriment les projections sur les plans xz et yz du même parallélogramme; la somme des carrés de ces trois quantités est donc égale au carré de l'aire de ce parallélogramme, de sorte que l'on a

$$(rr'\sin.\widehat{r,r'})^2\cos.^2(\mathrm{P},rr'') = \frac{a^2b^2c^2}{\mathrm{L}^2+\mathrm{M}^2+\mathrm{N}^2}\left(\mathrm{L}\frac{\alpha''}{a^2}+\mathrm{M}\frac{\mathcal{C}''}{b^2}-\mathrm{N}\frac{\gamma''}{c^2}\right)^2;$$

on a pareillement

$$(rr''\sin.\widehat{r,r''})^2\cos.^2(\mathrm{P},rr'') = \frac{a^2b^2c^2}{\mathrm{L}^2+\mathrm{M}^2+\mathrm{N}^2}\left(\mathrm{L}\frac{\alpha'}{a^2}+\mathrm{M}\frac{\mathcal{C}'}{b^2}-\mathrm{N}\frac{\gamma'}{c^2}\right)^2,$$

$$(r'r''\sin.\widehat{r',r''})^2\cos.^2(\mathrm{P},r'r'') = \frac{a^2b^2c^2}{\mathrm{L}^2+\mathrm{M}^2+\mathrm{N}^2}\left(\mathrm{L}\frac{\alpha}{a^2}+\mathrm{M}\frac{\mathcal{C}}{b^2}-\mathrm{N}\frac{\gamma}{c^2}\right)^2.$$

Ajoutons membre à membre ces deux dernières équations et retranchons-en la première; nous aurons, en vertu des équations (C) et (D),

$$(r'r''\sin.\widehat{r',r''})^2\cos.^2(\mathrm{P},r'r'') + (rr''\sin.\widehat{r,r''})^2\cos.^2(\mathrm{P},rr'') - (rr'\sin.\widehat{r,r'})^2\cos.^2(\mathrm{P},rr')$$

$$= \frac{a^2b^2c^2}{\mathrm{L}^2+\mathrm{M}^2+\mathrm{N}^2}\left(\frac{\mathrm{L}^2}{a^2}+\frac{\mathrm{M}^2}{b^2}-\frac{\mathrm{N}^2}{c^2}\right).$$

Le second membre de cette équation est indépendant des diamètres r, r', r''; les trois termes du premier membre sont les carrés des projections orthogonales sur le plan P des parallélogrammes construits sur ces diamètres deux à deux; on a donc ce théorème :

Si l'on projette orthogonalement sur un plan fixe les trois parallélogrammes construits sur trois demi-diamètres conjugués quelconques, pris deux à deux, le carré de la projection du pa-

rallélogramme construit sur les deux demi-diamètres de l'hyperboloïde à une nappe moins la somme des carrés des projections des deux autres parallélogrammes est une quantité constante, quels que soient les trois diamètres conjugués.

(15) Si l'on fait les projections sur trois plans rectangulaires, le carré d'un parallélogramme sera égal à la somme des carrés de ses trois projections, on conclut donc de ce théorème que :

Si l'on forme les parallélogrammes construits sur trois demi-diamètres conjugués pris deux à deux, le carré de celui qui sera construit sur les deux demi-diamètres de l'hyperboloïde à une nappe moins la somme des carrés des deux autres sera une quantité constante, quels que soient les trois diamètres conjugués.

(16) Supposons maintenant que les trois axes coordonnés soient trois diamètres conjugués quelconques; les projections sur le plan des xy des trois parallélogrammes construits sur les trois demi-diamètres r, r', r'', pris deux à deux, ont pour expressions de leurs surfaces

$$(\alpha\beta'-\alpha'\beta)\sin.\widehat{x,y},\quad (\alpha\beta''-\alpha''\beta)\sin.\widehat{x,y},\quad (\alpha''\beta'-\alpha'\beta'')\sin.\widehat{x,y},$$

ou, en vertu des équations (E),

$$\frac{ab}{c}\gamma''\sin.\widehat{x,y},\quad \frac{ab}{c}\gamma'\sin.\widehat{x,y},\quad \frac{ab}{c}\gamma\sin.\widehat{x,y}.$$

Prenons le carré de la première de ces trois expressions, et retranchons-en la somme des carrés des deux autres, on a

$$\frac{a^2b^2}{c^2}\sin.^2\widehat{x,y}\,(\gamma''^2-\gamma'^2-\gamma^2)=a^2b^2\sin.^2\widehat{x,y},$$

en vertu de la troisième des équations (C);

Cette expression reste la même quel que soit le système des trois diamètres conjugués r, r', r''; on a donc ce théorème :

Si l'on projette sur un plan fixe par des droites parallèles au diamètre conjugué à ce plan, les trois parallélogrammes con-

struits sur trois demi-diamètres conjugués quelconques, pris deux à deux, le carré de la projection du parallélogramme construit sur les deux demi-diamètres de l'hyperboloïde à une nappe moins la somme des carrés des projections des deux autres parallélogrammes sera une quantité constante, quels que soient ces trois diamètres conjugués.

(17) Nous avons vu (11) que le volume du rhomboïde construit sur les trois demi-diamètres a, r', r'', a pour expression $\alpha \sin. (x,yz). bc. \sin. \widehat{y,z}$; pareillement le volume du rhomboïde construit sur les trois demi-diamètres a, r, r'', a pour expression $\alpha' \sin. (x,yz). bc. \sin. \widehat{y,z}$; et le volume du rhomboïde construit sur les trois demi-diamètres a, r, r', a pour expression $\alpha'' \sin. (x,yz). bc. \sin. \widehat{y,z}$; le carré de cette dernière quantité moins la somme des carrés des deux premières égale

$$b^2c^2. \sin.^2 \widehat{y,z}. \sin.^2 (x,yz) (\alpha''^2 - \alpha'^2 - \alpha^2);$$

et, en vertu de la première des équations (C), cette expression se réduit à

$$a^2b^2c^2 \sin.^2 \widehat{y,z}. \sin.^2 (x,yz),$$

et se trouve indépendante des diamètres r, r', r''; mais de plus cette quantité est le carré du volume du rhomboïde construit sur les trois demi-diamètres conjugués a, b, c; et ce volume est le même quels que soient ces trois demi-diamètres (12); on a donc ce théorème :

Si sur un demi-diamètre fixe, et sur trois demi-diamètres conjugués pris deux à deux on construit trois rhomboïdes, le carré du rhomboïde construit sur les deux demi-diamètres conjugués appartenans à l'hyperboloïde à une nappe, moins la somme des carrés des deux autres rhomboïdes, sera une quantité constante, quels que soient les trois diamètres conjugués, et quel que soit aussi le diamètre fixe.

(18) On peut considérer ce théorème comme un corollaire d'un théorème général que voici :

Une courbe Σ étant tracée dans le plan mené par les extrémités de trois demi-diamètres conjugués, si on la projette sur les trois plans déterminés par ces diamètres pris deux à deux, les projections se faisant par des droites respectivement parallèles à ces diamètres, et qu'on regarde un point pris arbitrairement sur l'un des deux hyperboloïdes comme le sommet de trois pyramides qui aient pour bases les trois projections, le carré du volume de la pyramide dont la base sera sur le plan des deux demi-diamètres appartenans à l'hyperboloïde à une nappe moins la somme des carrés des volumes des deux autres pyramides sera une quantité constante égale au carré du volume de la pyramide ayant pour base la courbe Σ et pour sommet le centre des hyperboloïdes; ce carré étant pris avec le signe + ou avec le signe — suivant que le sommet commun des trois pyramides est sur l'hyperboloïde à deux nappes ou à une nappe.

En effet, les trois diamètres conjugués sur les plans desquels se font les projections, étant pris pour axes coordonnés, les deux hyperboloïdes sont représentés par la double équation

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=\pm 1.$$

Soit p la perpendiculaire abaissée du centre des hyperboloïdes sur le plan des extrémités des trois demi-axes a, b, c, on aura, en désignant ce plan par P,

$$p=a\,\sin.(x,\mathrm{P}),$$

$$p=b\,\sin.(y,\mathrm{P}),$$

$$p=c\,\sin.(z,\mathrm{P}),$$

et l'équation des hyperboloïdes devient

$$x^2\sin.^2(x,\mathrm{P})+y^2\sin.^2(y,\mathrm{P})-z^2\sin.^2(z,\mathrm{P})=\pm p^2$$

Soit Σ l'aire de la courbe tracée dans le plan P ; on peut écrire cette équation ainsi :

$$\Sigma^2.\frac{\sin.^2(x,P)}{\sin.^2(x,yz)}.x^2.\sin.^2(x,yz)+\Sigma^2.\frac{\sin.^2(y,P)}{\sin.^2(y,xz)}y^2.\sin.^2(y,xz)$$
$$-\Sigma^2\frac{\sin.^2(z,P)}{\sin.^2(z,xy)}z^2\sin.^2(z,xy)=\pm p^2\Sigma^2.$$

$\Sigma\frac{\sin.(x,P)}{\sin.(x,yz)}$ est l'aire de la projection de la figure Σ sur le plan des yz, et $x.\sin.(x,yz)$ est la perpendiculaire abaissée du point (x,y,z) sur ce plan des yz ; le produit de ces deux expressions est donc égal à trois fois le volume de la pyramide qui a pour sommet ce point, et pour base cette projection ; les deux autres termes du premier membre de l'équation ont de pareilles significations, et la quantité $p\Sigma$ du deuxième membre exprime trois fois le volume de la pyramide qui a pour base la figure Σ, et pour sommet le centre des hyperboloïdes ; l'équation démontre donc le théorème énoncé.

(19) Les plans tangens à l'hyperboloïde à une nappe aux extrémités des deux demi-diamètres r, r' ont pour équations

$$\frac{\alpha x}{a^2}+\frac{6y}{b^2}-\frac{\gamma z}{c^2}=1,$$

$$\frac{\alpha' x}{a^2}+\frac{6'y}{b^2}-\frac{\gamma' z}{c^2}=1\,;$$

et le plan tangent à l'hyperboloïde à deux nappes à l'extrémité du diamètre r'' a pour équation

$$\frac{\alpha'' x}{a^2}+\frac{6''y}{b^2}-\frac{\gamma'' z}{c^2}=-1.$$

Ces trois plans tangens rencontrent l'axe des x à des distances de l'origine égales à $\frac{a^2}{\alpha}$, $\frac{a^2}{\alpha'}$, $-\frac{a^2}{\alpha''}$; les valeurs inverses de ces

distances sont $\frac{\alpha}{a^2}, \frac{\alpha'}{a^2}, -\frac{\alpha''}{a^2}$; la somme des carrés des deux premières moins le carré de la troisième est égale à

$$\frac{\alpha^2+\alpha'-\alpha''^2}{a^4}=\frac{1}{a^2}$$

(en vertu de la première des équations (C)) ce qui prouve que :

Étant pris trois demi-diamètres conjugués quelconques, les plans tangens à l'hyperboloïde à une nappe aux extrémités des deux demi-diamètres qui aboutissent à la surface de cet hyperboloïde, et le plan tangent à l'hyperboloïde à deux nappes à l'extrémité du troisième demi-diamètre, rencontrent un diamètre fixe en trois points dont les distances au centre des deux hyperboloïdes sont telles que la somme des carrés des valeurs inverses des deux premières moins le carré de la valeur inverse de la troisième, est une quantité constante quels que soient les trois diamètres conjugués.

(20) Élevons au carré les équations des trois plans tangens ; ajoutons membre à membre les deux premières, et retranchons-en la troisième, on aura

$$(\alpha^2+\alpha'^2-\alpha''^2)\frac{x_2}{a^4}+(\beta^2+\beta'^2-\beta''^2)\frac{y^2}{b^4}+(\gamma^2+\gamma'^2-\gamma''^2)\frac{z^2}{c^4}+$$
$$(\alpha\beta+\alpha'\beta'-\alpha''\beta'')\frac{xy}{a^2b^2}+\text{etc.}=1,$$

ou, d'après les équations (C) et (D),

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1;$$

cette équation est celle de l'hyperboloïde à une nappe; d'où l'on conclut que :

Le point d'intersection de trois plans tangens respectivement aux deux hyperboloïdes conjugués aux extrémités de trois demi-

diamètres conjugués se trouve sur l'hyperboloïde à une nappe.

Ou, en d'autres termes,

Le sommet du rhomboïde construit sur trois demi-diamètres conjugués se trouve sur l'hyperboloïde à une nappe.

(21) Il suit de là que :

Si l'on mène deux plans tangens à un hyperboloïde à une nappe aux extrémités de deux demi-diamètres conjugués, la droite d'intersection de ces deux plans tangens percera l'hyperboloïde en deux points, et la partie de cette droite comprise entre ces deux points aura son carré égal au carré du diamètre imaginaire conjugué aux deux premiers diamètres.

Il est facile de démontrer cela directement :

Car soit

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

l'équation de l'hyperboloïde, rapportée à trois diamètres conjugués. Les plans tangens aux extrémités des deux demi-diamètres dirigés suivant les axes des x et des y ont pour équations

$$x=a \qquad \text{et} \qquad y=b;$$

la droite d'intersection de ces deux plans rencontre l'hyperboloïde en deux points situés de part et d'autre du plan des xy, et dont les ordonnées sont données par l'équation

$$1+1-\frac{z^2}{c^2}=1$$

ou

$$z^2=c^2$$

ce qui démontre le théorème.

Mémoire relatif à l'explication des formations cristallines; par M. le professeur THILO, de Francfort (1).

Il est à présumer que les lois de la cristallisation dérivent des lois de l'attraction comme de leur source principale. Mais doit-il exister nécessairement, comme le pensent plusieurs minéralogistes, une formule générale d'après laquelle on pourrait déterminer dans chaque cas particulier, tout ce qui caractérise les cristaux? Cette question serait bien difficile à résoudre; et quoiqu'il en soit, chaque formation cristalline me paraîtrait exiger de la part du mathématicien, qui voudrait l'expliquer, des efforts aussi grands que si elle présentait à elle seule, mais sur une échelle très-petite, un système du monde tout entier. Le rang que la mécanique d'un seul cristal doit occuper dans les sciences mathématiques, ne me semble pas moindre que celui d'une mécanique céleste.

Je ne puis me faire une idée bien nette des particules matérielles dont le cristal est composé. Il faut admettre que chaque particule remplisse un certain espace. On peut donc en concevoir des parties; de sorte que chaque particule doit être considérée comme se composant d'autres particules, qui se tiennent réunies au moyen d'une *force*. Je les nommerai particules primaires. Mais on n'a pas besoin de remonter jusque-là pour expliquer la formation des cristaux; il suffit d'envisager des molécules matérielles composées, qui seraient, par exemple, mille millions de fois plus petites qu'un ver infusoire. Telles sont peut-être les particules matérielles du sel commun qui, se trouvant dans

(1) M. *Thilo* a publié en 1828, une dissertation sur les taches du soleil, observées pendant les six derniers mois de 1826 et les six premiers de 1827. Les observations ont été faites par le célèbre Sœmmering, à qui le travail est dédié; in-4°, avec planches. Francfort.

l'eau à l'état de solution, s'y soutiennent par l'attraction que les particules du liquide exercent sur elles. Dans la solution même du sel, ces particules matérielles pourraient bien être des corps solides, et quoiqu'on ne puisse rien décider à cet égard, je les admettrai comme telles dans ce qui va suivre.

La nature des particules mêmes sera peut-être différente pour différens corps, et à plus forte raison, leur composition ultérieure. Je passerai donc de suite à la recherche du cristal que sa simplicité remarquable sous bien des rapports, m'a fait prendre en prédilection.

Abstraction faite de la forme sphérique à couches concentriques *du fer pisiforme*, la formation cristalline la plus simple est *le dodécaèdre rhomboïdal du grenat*, terminé par des rhombes égaux. Or, quand il s'agit de ramener les lois de la cristallisation à celles de l'attraction, on ne saurait disconvenir que la forme la plus simple, est celle qui approche le plus de la sphère.

Le rapport intime de la sphère et du dodécaèdre rhomboïdal, se déduit assez des considérations géométriques les plus simples; on peut d'ailleurs le constater par l'expérience suivante.

Expérience. J'ai pris de la glaise humide bien pétrie, et j'en ai pesée 35 parties de même poids, partant de même volume. J'en ai formé des globules sphériques, et j'en ai séché la surface avec de la farine. J'ai construit alors un tétraèdre creux, par l'assemblage de trois triangles équilatéraux en carton, j'ai fait encore plusieurs autres tétraèdres semblables, de manière à pouvoir les faire entrer dans la pyramide creuse et à les en retirer au moyen d'un fil. J'ai commencé par placer un seul globule dans l'intérieur du premier tétraèdre, et au-dessus de lui trois autres, en sorte que le premier se trouvait dans l'espace que ceux-ci laissaient entre eux. De la même manière j'ai formé une troisième couche de 6 globules, une quatrième de 10 et une cinquième de 15. J'ai comprimé ensuite avec précaution ces 35 globules, au moyen des petits triangles équilatéraux. Or, en les retirant de la pyramide, j'ai vu qu'ils avaient des faces rhomboïdales là où ils avaient été en contact les uns

avec les autres; et, ce qu'on pouvait prévoir du reste, le globule intérieur qui avait été entouré de 12 autres, était complétement changé en dodécaèdre rhomboïdal.

Le dodécaèdre rhomboïdal se compose, comme on sait, de quatre *rhomboèdres* à six faces rhomboïdales parfaitement égales.

Qu'on suppose *des sphéroïdes elliptiques*, engendrés par la rotation d'une ellipse autour du second axe, ou *des lentilles* qui seraient composées de glaise, ainsi que les globules de l'expérience précédente. Qu'on en place trois en contact aux sommets d'une triangle, de manière que les équateurs se trouvent dans un même plan. Qu'on place dans l'espace que laissent entre elles ces trois lentilles, une quatrième, et enfin sur cette quatrième, trois autres distribuées comme les premières en forme de triangle, mais en sorte que les sommets correspondent aux côtés du premier triangle. Si l'on comprime alors ces sept lentilles, la quatrième prend tout-à-fait la forme rhomboèdrique.

Expérience. J'ai fait construire en fer blanc un petit vase cylindrique assez fort, et un couvercle qui s'y adaptait parfaitement. Dans le fond et sur la face latérale du premier, étaient pratiqués de petits trous. J'y ai mis des lentilles communes (*ervum lens*), que j'ai choisies régulières et d'égale grandeur; après avoir attaché le couvercle, j'ai plongé l'appareil dans l'eau. Les lentilles se sont gonflées, je les ai retirées de l'eau dans cet état, et plusieurs d'entre elles avaient pris la forme rhomboèdrique.

La forme cristalline du grenat, présente donc plusieurs caractères de simplicité, et il est bien à regretter qu'il n'existe pas de sel soluble dans l'eau qui cristallise en dodécaèdres rhomboïdaux. Nous ne connaissons pas le moyen par lequel s'effectue la cristallisation du grenat, j'ignore si elle s'opère par voie sèche ou par voie humide. Comme je ne veux faire aucune hypothèse à ce sujet, je me représente, au lieu du grenat, un sel soluble dans l'eau, dont l'existence quoique également imaginaire, n'est cependant pas impossible. Du reste, la ressem-

blance qui existe entre la forme du grenat et celle du fer pisiforme, fait que le rapport entre leurs élémens chimiques, mérite d'être remarqué. J'en présenterai donc ici l'analise d'après les *Tables synoptiques des minéraux*, par *Léonhard*.

MATIÈRES.	Grenat précieux d'Orient, SUIVANT KLAPROTH.	Grenat ordinaire de Norwège, SUIVANT VAUQUELIN.	Fer pisif. de Peane, dans le district Gaillac, SUIVANT VAUQUELIN.	Fer pisif. de Creusot, près du Mont-Cénis, SUIVANT VAUQUELIN.	Fer pisif. de Mardorf, en Hesse, SUIVANT MOELLINGHOF.
Oxyde de fer	36,00	10			
Fer			30	30	45
Oxygène			18		15
Silice	35,75	30	15		12
Alumine	27,25	20	31	20	13
Chaux		31		50	
Oxyde de Manganèse	0,25				
Eau			6		15
Perte	0,75	1			
	100,00	92	100	100	100

J'ai supposé que les particules matérielles solides, dont il a été question ci-dessus, sont déposées *symétriquement* dans le dissolvant; ce qui n'est pas bien exact à la vérité, puisqu'après quelques jours de repos, la pesanteur spécifique d'une solution de sel commun, augmente de la surface au fond; mais il faut de longs tubes ou des vases bien profonds, pour que cette variation devienne sensible. Au demeurant, la pesanteur spécifique varie suivant une loi fixe, il est donc permis d'admettre que dans un petit espace, la densité de la solution est homogène.

Or, si par une raison quelconque, la force attractive du dissolvant diminue d'une manière régulière, quelques-unes de ces particules matérielles, se dégageront symétriquement dans tout le volume du dissolvant, et viendront se réunir à cause de l'attraction qu'elles exercent les unes sur les autres, avec des forces qui dépendront de leur quantité, de leur vitesse initiale et de la résistance que le dissolvant oppose à leur mouvement. En se réunissant, elles formeront des globules *liquides* en tant que leurs parties pourront se déplacer librement. Ces globules qui seraient, par exemple, de la grandeur d'un grain de sable très-fin, sont ainsi que les particules solides déposés symétriquement dans le dissolvant. Ils représentent les particules matérielles liquides et mériteraient dans la mécanique des cristaux le nom de *molécules intégrantes*. Je suis tenté de croire que les molécules intégrantes de tous les cristaux, ne possèdent qu'une seule forme originaire, savoir la forme sphérique qui est si analogue aux lois de l'attraction. Ces sphères en s'aplatissant ou en s'allongeant, deviendront des sphéroïdes elliptiques lenticulaires ou ovales, selon que l'axe est plus petit ou plus grand que le diamètre de l'équateur. Il me semble encore que cette supposition est propre à expliquer d'après la mécanique, la distinction des cristaux qui approchent de la forme sphérique d'avec ceux qui sont d'une forme allongée et aigue. Quelle variété de formes ne résultera-t-il pas de la seule diversité des rapports de l'axe et du diamètre de l'équateur ! Les molécules intégrantes du grenat, appartiennent à la classe des lentilles dont quatre se réunissent pour former la partie intérieure du cristal, en prenant des faces rhomboïdales là où elles se touchent.

Ainsi abstraction faite de l'expérience mentionnée sur la solution du sel, je ne vois pas de raison pour admettre une distribution irrégulière ou variable des molécules intégrantes sphériques et liquides. Je la suppose donc pour le grenat symétrique par rapport aux effets de l'attraction, c'est-à-dire, telle que toutes les molécules soient attirées d'une manière semblable par toutes les molécules environnantes. Or, la distribution

symétrique de points, peut avoir lieu d'une infinité de manières. Des cubes, par exemple, posés de tous côtés les uns sur les autres, rempliront parfaitement l'espace et les points communs à huit cubes, y seront déposés symétriquement. Quelque chose de semblable aura lieu pour l'assemblage d'autres parallélipipèdes parfaitement égaux entre eux, soit droits, soit obliques, pourvu que les arêtes en soient de même grandeur. Les angles solides seront disposés symétriquement, par rapport aux effets de l'attraction, c'est-à-dire, que la distance d'un point quelconque à chacun de ceux qui composent un certain groupe, sera égale à la distance de tout autre point à des points analogues d'un groupe correspondant au premier. La variété de toutes les distributions symétriques possibles des molécules intégrantes, sera encore la source de la diversité des formations cristallines. J'en passerai l'explication sous silence, puisqu'elle me mènerait dans un trop vaste champ d'hypothèses. Il suffit d'avoir montré que plusieurs distributions symétriques sont possibles et qu'elles ne conviennent pas toutes à chaque cristal. La distribution en cubes, par exemple, ne convient nullement au grenat, puisqu'il faut que quatre molécules intégrantes se réunissent pour former la partie intérieure du cristal. La position de quatre molécules, doit donc être telle qu'une cinquième ne leur saurait être symétrique par rapport à elles. Or, si dans la distribution en cubes, le centre du cube est censé être celui du cristal, il y aura évidemment huit molécules dont la position est symétrique; il y en aura six, si le centre du cristal est représenté par une des molécules elles-mêmes, parce qu'il en partira des arêtes suivant six directions. Il y en aura donc trop dans les deux cas. Les quatre molécules intégrantes qui constituent la partie intérieure du cristal, devront être situées comme les angles solides d'un tétraèdre régulier.

Cela supposé, aussitôt que la force attractive du dissolvant n'y portera plus obstacle, les molécules pourront se mouvoir les unes vers les autres et former enfin la partie inférieure du cristal. *Mais pendant le mouvement, leur forme sphérique sera changée par la résistance du dissolvant en sphéroïde elliptique*

lenticulaire. Or, l'attraction qu'elles exercent les unes sur les autres, prévaut d'une si grande quantité sur celle du centre de la terre, que cette dernière peut être complétement négligée. Les molécules approcheront donc les unes des autres suivant leurs pôles. Il en est du rapport de l'ellipsoïde et du centre du cristal, comme d'une lentille qu'on jette à l'eau et du centre de la terre.

Expérience. J'ai rempli d'eau un flacon de verre assez grand, dont les faces latérales étaient planes pour éviter les illusions d'optique. J'y ai mis une goutte assez grande d'*huile de girofle*, dont la pesanteur spécifique excède, comme on sait, celle de l'eau, et j'ai bouché le flacon. En le retournant successivement sur lui-même, j'observais très-commodément la chute de la goutte, et je voyais que sa forme ne cessait d'être lenticulaire, et que la position du plan de l'équateur restait toujours horizontale. C'est la même position que prendra une lentille ordinaire qu'on jette à l'eau, quelle qu'en soit d'ailleurs la position initiale. Si au lieu de faire descendre dans l'eau l'huile de girofle, on y fait monter une huile de moindre pesanteur que l'eau, le résultat sera le même.

Lors même que les molécules liquides deviendraient solides avant que le mouvement fût achevé, nos hypothèses n'en subiraient pas de changement essentiel. Car, quoique retenant la forme lenticulaire, les molécules seraient d'une si grande ténuité en comparaison du cristal entier, que le grenat s'en composeraient tout aussi bien que si c'étaient des rhomboèdres. Mais il serait bien difficile de déterminer quand s'opère ce changement en corps solide; ce sera au plus tard au moment où les molécules se joignent à la cristallisation déjà commencée, sans quoi celle-ci finirait par présenter un sphère au lieu d'un dodécaèdre rhomboïdal. Il est probable que le temps pendant lequel les molécules deviennent solides, a une certaine durée, de manière qu'elles parviennent à l'état définitif, soit au commencement, soit à la fin de cette période; ce qui dépendra peut-être des élémens chimiques du cristal. Si les élémens du grenat étaient tels que les molécules devinssent solides après s'être réunies, nous obtiendrions un globule; et au lieu

du grenat, nous aurions le fer pisiforme, soit à couches concentriques, soit en masses compactes. Comme on peut supposer avec la même probabilité, que les molécules intégrantes sont ou de forme lenticulaire ou de forme rhomboèdrique, je puis échanger ces formes l'une contre l'autre, pour éviter des longueurs dans ce qui va suivre.

Le dodécaèdre rhomboïdal se compose d'après la géométrie de quatre rhomboèdres. Si l'on en partage les arêtes en deux parties égales, chaque rhomboèdre en contiendra huit autres, et le dodécaèdre se trouvera de cette manière divisé en 32 rhomboèdres.

Soit (*fig.* 1), un tel dodécaèdre rhomboïdal, dont les arêtes sont représentées par des lignes pleines. L'angle solide A, se compose de trois angles obtus, ainsi que l'angle solide α, qui lui est diamétralement opposé. Nommons ces angles *angles solides obtus*, et concevons la position du cristal telle que la droite qui joint A et α soit verticale, A étant le point le plus haut et α le point le plus bas du cristal.

En premier lieu on pourra décomposer le dodécaècre, à partir du centre Z, dans les quatre rhomboèdres ZA, ZB, ZC, ZD. Les six plans suivans lesquels la décomposition du cristal a lieu, sont ZN, ZN, ZN, qui en séparent le rhomboèdre ZA et $Z\beta$, $Z\gamma$, $Z\delta$, qui en séparent les autres rhomboèdres. Les droites ZM, ZM, ZM, $Z\alpha$,..... qu'on doit mener du centre Z aux extrémités du cristal, pour représenter ces six plans, sont désignées par de petits traits et des points alternatifs. Les points B, C, D, se trouvent d'ailleurs, d'après ce que nous venons de supposer, dans un plan horizontal.

Décomposons maintenant ce rhomboèdre ZA, dans les huit rhomboèdres dont nous avons parlé ci-dessus, et représentons-en un par Za, sans indiquer les autres qu'on pourrait aisément suppléer dans la figure. Le second d'entre eux serait aA, verticalement sur le premier. Le troisième, le quatrième et le cinquième aM, aM, aM, sont groupés symétriquement suivant trois directions différentes, ainsi que le sixième, le septième et le huitième aN, aN, aN.

La décomposition des rhomboèdres ZB, ZC, ZD, est toute semblable à celle de ZA. Les petits rhomboèdres *Zb*, *Zc*, *Zd*, qui se groupent autour du centre Z, formeront avec ZA, le dodécaèdre intérieur (représenté dans la figure, par des lignes pointillées), autour duquel les 28 autres rhomboèdres, viendront se placer comme une couche concentrique autour d'un globule.

Pour que ces considérations géométriques ne paraissent pas tout-à-fait stériles, je ferai ici par antioipation *une remarque dont la découverte me paraît d'une grande importance dans ces recherches, en tant qu'elle porte l'empreinte de la rigueur géométrique, et que ce n'est que par elle que les idées que j'ai émises jusqu'à présent, peuvent être élevées au rang d'une hypothèse. Elle montrera que le chemin long et pénible que j'ai suivi pour composer le cristal d'un certain nombre de molécules intégrantes, pour déterminer suivant la géométrie la position réelle de ces molécules, pour en exprimer géométriquement la distribution primitive dans le dissolvant, enfin pour calculer la force avec laquelle chaque particule est attirée vers le centre supposé par un certain nombre d'autres molécules; elle montrera, dis-je, que ce chemin n'est pas tout-à-fait faux et mal choisi.*

Je répète d'abord que les molécules intégrantes étant disposées symétriquement, et le dodécaèdre étant décomposé en 32 rhomboèdres, le rhomboèdre A*a*, dont trois faces forment l'angle solide A, sera le plus haut dans le cas que l'axe A*a* est vertical. Cela fait, voici la remarque elle-même : Le dodécaèdre intérieur du cristal, ne saurait avoir une position telle que l'un des quatre rhomboèdres dont il se compose, soit le plus haut. Il y en aura un au contraire qui sera le plus bas (*Za*), tandis que les trois autres *Zb*, *Zc*, *Zd*, sont situés plus haut, en sorte que *b*, *c*, *d*, sont dans un plan horizontal. Ainsi donc, si le dodécaèdre se compose *réellement* de 32 rhomboèdres, la position du dodécaèdre intérieur ne sera pas comme dans la première figure, mais bien comme dans la seconde. Il est aisé de comparer ces positions en retournant la *fig* 2, afin que la po-

sition du dodécaèdre intérieur y devienne semblable à celle de la *fig.* 1. Il n'y a donc pas réellement de plans de séparation $Z\beta$, $Z\gamma$,.... (*fig.* 1), qui, à partir du centre Z, se prolongeraient jusqu'à la surface du cristal. Les plans de séparation du dodécaèdre intérieur aboutiront au contraire aux arêtes des molécules dont se compose la couche environnante, et si on les prolonge suffisamment, ils partageront ces molécules en deux parties égales; ce dont on se persuadera facilement au moyen de la *fig.* 2, où verticalement sous A, trois rhomboèdres du dodécaèdre intérieur constituent l'angle solide ε. L'arête $Z\varepsilon$, qui leur est commune passera, étant suffisamment prolongée, par l'axe du rhomboèdre le plus haut ($A\varepsilon$).

Cette remarque explique parfaitement les faits minéralogiques relatifs à la séparation laminaire qu'on observe en cassant le grenat. On obtient facilement des rhomboèdres, en cassant de la chaux carbonatée, parce que les molécules intégrantes de ce corps qui sont évidemment aussi de forme rhomboèdrique ou lenticulaire, s'y réunissent de manière à produire une triple séparation laminaire. Mais en cassant le grenat, on ne parvient jamais à des rhomboèdres (à moins qu'ils ne fussent des molécules intégrantes). Il n'y a donc pas de séparation laminaire dans ce cristal. Le grenat ordinaire au contraire, se rompt par grains plus ou moins grands, et le grenat précieux se fend par écailles ou éclats unis; différence qui dépendra peut-être de la grandeur des molécules intégrantes. Au reste, la manière dont les parties se séparent du cristal, revient à celle qu'on remarque dans le fer pisiforme.

La ligne droite qui joint les deux angles solides obtus d'un rhomboèdre, sera nommée avec raison l'axe, puisqu'elle l'est relativement à sa forme antérieure (le sphéroïde elliptique). D'après la géométrie, le sphéroïde est engendré par la rotation d'une ellipse autour du second axe. Mais nous ne saurions concevoir que la molécule intégrante liquide et sphérique, ait réellement un mouvement rotatoire qui l'aplatisse à raison de la force centrifuge. Ce changement de forme proviendra plutôt de la même cause que celui de la goutte d'huile qui tombe

dans l'eau, sans qu'on y remarque la moindre trace d'un mouvement rotatoire.

En considérant que les inclinaisons des faces du dodécaèdre rhomboïdal, sont de 120°, on trouvera au moyen d'un raisonnement trop facile pour m'y arrêter, que les arêtes de chaque rhomboèdre sont égales à l'axe. Désignons celui-ci par a, et nommons-en le milieu *centre du rhomboèdre;* ce sera en même temps le centre de gravité. Quant aux distances des centres des 32 rhomboèdres au centre Z de tout le cristal; nous trouverons pour le rhomboèdre ZA (*fig.* 1), si les huit rhomboèdres qui le constituent se suivent dans le même ordre, qu'auparavant :

La distance du centre 1 à Z $= \frac{1}{2} a$,

La distance du centre 2 à Z $= \frac{3}{2} a$,

La distance des centres 3, 4 et 5 (aM) à Z

$$= a\sqrt{\frac{19}{12}} = 1{,}2530.\ a,$$

La distance des centres 6, 7 et 8 (aN) à Z $= \frac{3}{2} a$,

Le calcul de ces valeurs est trop facile pour qu'il soit nécessaire d'en faire ici mention. Il y a donc parmi les 32 centres :

4 qui ont la dist. $\frac{1}{2} a$
12 qui ont la dist. $a\sqrt{\frac{19}{12}}$
16 qui ont la dist. $\frac{3}{2} a$
} au centre Z du cristal.

Je passe maintenant à la considération de la distribution primitive des 32 rhomboèdres ou de celle de leurs centres, avant qu'ils forment par leur assemblage le dodécaèdre rhom-

boïdal. Il faut qu'elle soit telle qu'on y puisse reconnaître 32 points qui correspondent un à un aux 32 rhomboèdres, dont le cristal se compose dans l'état définitif. Il n'y a pas de doute, que les quatre points intérieurs n'aient la position des angles solides d'un tétraèdre régulier, puisque chacun de ces points doit avoir la même position relativement aux trois autres. Mais des tétraèdres posés de tous côtés, les uns sur les autres, ne rempliraient pas complètement l'espace; un certain nombre de points ne pourrait donc se disposer symétriquement suivant des tétraèdres. J'ignore s'il y a plusieurs modes de distributions symétriques, qui se rapportent aux 32 molécules intégrantes. Je me contenterai du premier qui se présente, et qui cadre parfaitement avec le cas que nous envisageons. Il est représenté dans les *fig.* 3...7, qui sont parfaitement égales quant à la position des lignes respectives. Les points y sont rangés en triangles équilatéraux, dont les côtés sont égaux à b. Qu'on se représente maintenant ces figures situées dans des plans horizontaux de manière que les projections horizontales de toutes les lignes de chaque figure coïncident avec les lignes analogues de toutes les autres. (Je rappelle ici que le mot position par rapport à l'horizon, ne sert qu'à abréger le discours, et ne porte nullement sur la formation réelle du cristal). Si la distance de chaque plan horizontal au plan voisin est $= b\sqrt{\frac{2}{3}}$. il y aura lieu à une distribution de points symétrique, parfaitement appropriée aux 32 molécules intégrantes de notre cristal. Chaque point d'un de ces plans formera alors un tétraèdre régulier avec trois points du plan voisin. La *fig.* 3 est censée être la plus élevée; puis viennent successivement la *fig.* 4, la *fig.* 5, la *fig.* 6 qui revient à la *fig.* 3, la *fig.* 7 qui revient à la *fig.* 4, etc. La distance de deux points qui, d'après cette distribution, se suivent sur la même verticale, est donc trois fois plus grande que la distance de deux plans voisins ou $= 3b\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Si donc la position du cristal dans l'état définitif, est comme dans la *fig.* 2, les 32 molécules intégrantes seront situées dans cinq plans horizontaux. Elles sont numérotées dans les *fig.* 3...7, et désignées de manière qu'on puisse les retrouver dans la *fig.* 2. Le centre du cristal se trouve entre les plans 5 et 6, au centre de gravité du tétraèdre régulier formé par les points 12, 13, 16, 24. Ce sont ces quatre molécules qui constituent le dodécaèdre intérieur. Remarquons qu'elles ont relativement à celles qui les entourent, la position (*fig.* 2), suivant laquelle le rhomboèdre *Za* (correspondant à *fig.* 6), est situé plus bas que les trois autres *Zb*, *Zc*, *Zd* (correspondant à *fig.* 5), qui se trouvent dans la même couche horizontale. Or, la position du dodécaèdre intérieur (*fig.* 1), qui résulte de la décomposition du cristal en quatre rhomboèdres, n'est conforme à aucune distribution symétrique primitive. *La remarque que nous avons déjà faite préalablement se trouve donc maintenant vérifiée.* Au reste, la couche extérieure des 28 rhomboèdres, sera partagée au moyen de cette décomposition géométrique, en quatre parties à 7 rhomboèdres ; par conséquent, les sept rhomboèdres qui contiennent l'angle solide A (*fig.* 2), avaient d'abord la position des points 3, 5, 6; 2, 4, 7 et 1 (*fig.* 3 et 4); ensuite la partie qui contient l'angle solide B, se rapporte semblablement aux points 17, 25, 28; 14, 19, 32 et 29; celle qui contient l'angle solide C, aux points 15, 23, 27; 11, 18, 31 et 26; enfin celle qui contient l'angle solide D, aux points 9, 21, 22; 8, 10, 30 et 20.

Quoique dans l'état définitif, la distance au centre des particules εN (*fig.* 4), soit de $\frac{3}{2}a$, tandis que celle des particules εM n'est que de $a\sqrt{\frac{19}{12}}$, elles sont dans l'état primitif plus approchées du centre que les dernières. Mais cette différence ne porte pas sur le fond de la question. Car en premier lieu, la résultante des forces qui s'exercent sur chaque particule passera évidemment, sans dévier ni à droite ni à gauche, sinon par le centre du cristal, du moins par la verticale dans

laquelle il se trouve. La particule εN s'avancera donc entre εM, et le centre du cristal vers l'endroit où elle doit aboutir. Alors même qu'elle remplirait sa destination plus tôt que la particule voisine εM, il n'en saurait résulter aucun changement. C'est pourquoi j'ai cru superflu d'assujettir à de longs calculs, la quantité de l'attraction que εM et εN éprouvent d'un certain nombre de molécules intégrantes. Mais il est probable en second lieu, quoiqu'il ne s'agisse pas ici d'un corps parfaitement dense, que les molécules εN sont poussées vers le centre avec une moindre force que les molécules εM, par cela même qu'elles en sont plus près dans leur position primitive. Les molécules εM auront par conséquent une vitesse initiale plus grande que les particules εN, et pourront arriver à l'endroit de leur destination en même temps que celles-ci ou même plus tôt. Il y a encore moins de difficulté à concevoir que la distance primitive encore plus grande de la particule Aε (*fig.* 3), puisse se changer à la fin en $\frac{3}{2}a$. Le mouvement de cette particule dépend principalement de l'attraction des six molécules (*fig.* 4), dont elle suit la marche. Ainsi donc la supposition que les particules extérieures A, B, C, D (*fig.* 2), qui sont les plus éloignées du centre dans l'état primitif, se réunissent au cristal les dernières, sinon en même temps que les autres, est précisément celle qui fait rejaillir le plus de lumière sur la formation cristalline du grenat.

La remarque qu'il y a encore douze molécules qui ont dans la distribution primitive la même distance au centre Z, que les molécules A, B, C, D, mérite d'être plus sérieusement envisagée. Ces douze molécules qui sont désignées par *p* (*fig.* 3...7), quoique semblables à A, B, C, D, sous le rapport de leur distance au centre, en sont bien différentes sous le rapport de l'attraction. Les droites qui joignent les quatre molécules au centre Z, passent verticalement par les centres de gravité de deux triangles, dont l'un est formé par les molécules εN (*fig.* 4) et l'autre par les molécules Z*b*, Z*c*, Z*d* (*fig.* 5), ce qui fait présumer que la force qui les attire au centre, est

respectivement assez forte. Un autre résultat aura lieu pour les douze molécules qui, jointes à celles du cristal, en élèvent le nombre à 44. A l'effet de comparer l'attraction vers le centre que ces douze molécules éprouvent de la part des 43 autres avec celle qu'en éprouvent les quatre molécules du cristal, j'ai désigné par *a* la force que chaque molécule exerce sur une autre à la distance adoptée (*b*), et j'ai trouvé par un calcul long et compliqué, que chacune des molécules A, B, C, D, est attirée vers le centre avec une force = 8,69139. *a*, tandis que chacune des douze molécules n'y est attirée qu'avec une force = 8,39775. *a*. On voit donc que la force attractive des premières est un peu plus grande que celle des dernières. Toutefois ce résultat ne saurait être très-exact, puisqu'on y a négligé l'effet de l'attraction des molécules environnantes. Cette égalité de distance et le peu de différence des forces attractives, est d'ailleurs très-remarquable. C'est peut-être de là que dérivent les différentes modifications qu'on observe dans les formations cristallines du grenat, comme, par exemple, celle du grenat à arêtes tronquées.

Au demeurant, je ne soutiendrai nullement que la nature distingue aussi nettement que je l'ai fait, les trois époques de la cristallisation; savoir l'époque à laquelle les particules solides se dégagent du dissolvant; puis celle de la formation des particules matérielles liquides déposées symétriquement, et enfin celle du changement de forme et d'état, et de l'achèvement de la cristallisation. Je conçois au contraire ces trois époques comme essentiellement simultanées, de sorte que les molécules solides dès qu'elles se sont dégagées et même auparavant, tendent vers un centre provenant d'une cause quelconque.

La symétrie supposée de la distribution des molécules intégrantes, ne saura donc subsister que tant que l'attraction centrique de la cristallisation n'y aura encore occasionné aucune altération. Je ne soutiendrai pas non plus qu'il n'y ait que les deux degrés mentionnés de la cristallisation, savoir la formation des molécules intégrantes liquides et sphériques, résultant de la réunion des particules matérielles solides, et la

formation cristalline elle-même, résultant de la réunion des molécules intégrantes. Ces dernières sont peut-être composées d'autres globules liquides, ceux-ci de globules liquides encore plus petits et ainsi de suite. Il n'y a de certain dans tout cela que l'existence des molécules intégrantes, dont le cristal se compose définitivement. C'est en admettant une distribution primitive symétrique, et en supposant un changement de forme provenant de la résistance du dissolvant, que je crois avoir coopéré à l'avancement de la théorie de la cristallisation. Je crois encore avoir été utile en soutenant généralement que, des élémens chimiques du cristal dépendent le mode de distribution (qui peut varier à l'infini), et la forme que les molécules reçoivent (forme qui varie également avec le rapport de l'axe et du diamètre de l'équateur); je pense enfin qu'on n'aura pas vu sans intérêt un premier essai pour expliquer les formations cristallines, au moins celle du grenat, par les lois générales de l'attraction.

Sur les surfaces du second degré, par M. Chasles.

M. *Poncelet* a démontré, dans son Mémoire sur les polaires réciproques, que : « Si autour d'un point fixe, comme sommet, » on fait tourner un angle trièdre trirectangle, les plans menés » par les points, pris 3 à 3, où ses arêtes rencontrent une » surface du second degré, enveloppent une seconde surface » du second degré, qui est de révolution, et dont un des » foyers est au sommet de l'angle mobile. »

Si l'on prend pour ce sommet le centre de la surface proposée, il est clair que la surface enveloppe des plans en question, aura aussi ce point pour centre. Or, quand le foyer d'une surface de révolution se confond avec son centre, cette surface ne peut être qu'une sphère; on a donc ce théorème :

Le plan déterminé par les extrémités de trois demi-diamètres

rectangulaires d'une surface du second degré enveloppe une sphère.

On sait que si d'un point fixe on mène à un plan trois rayons rectangulaires, la somme des carrés de leurs valeurs inverses est égale au carré de la valeur inverse de la perpendiculaire abaissée de ce point sur le plan; ce qui résulte de ce que le cosinus de l'angle que la perpendiculaire fait avec chaque rayon, est égal au quotient de cette perpendiculaire par ce rayon; et de ce que la somme des carrés des trois cosinus est égale à l'unité.

D'après cela, on conclut du théorème précédent que :

La somme des carrés des valeurs inverses de trois diamètres rectangulaires d'une surface du second degré est constante, quel quel soit le système de ces trois diamètres.

Nous avions déjà démontré ces deux théorèmes pour le cas particulier d'un ellipsoïde, dans la *Correspondance sur l'école polytechnique,* tome III, page 305. Le second a été démontré depuis en plusieurs occasions.

Note sur l'article de M. De Montferrier, *inséré dans le numéro précédent, page* 97; par M. Verhulst, docteur en sciences.

Désignant par tang. x', tang. x'', tang. x''', trois nombres entiers A, B, C, tels que

$$ABC = A + B + C \qquad (1)$$

M. *De Montferrier* tombe, après une analise assez laborieuse, sur la relation suivante entre les arcs x', x'' et x''',

$$n\pi = x' + x'' + x''' \qquad (2)$$

qui n'est que l'énoncé d'une propriété connue depuis long-temps

(Voyez *les Mélanges de Mathématiques de M. Noël*, page 176). On peut la déduire sur-le-champ de la formule

$$\text{tang.}(a+b+c)=\frac{\text{tang.}\,a+\text{tang.}\,b+\text{tang.}\,c-\text{tang.}\,a.\,\text{tang.}\,b.\,\text{tang.}\,c}{1-(\text{tang.}\,a.\text{tang.}\,b+\text{tang.}\,a.\,\text{tang.}\,c+\text{tang.}\,b.\,\text{tang.}\,c)}:$$

car si l'on fait

$$a+b+c=n\pi,$$

on a

$$\text{tang.}(a+b+c)=o$$

et par conséquent

$$\text{tang.}\,a+\text{tang.}\,b+\text{tang.}\,c=\text{tang.}\,a.\,\text{tang.}\,b.\,\text{tang.}\,c.$$

De pareilles rencontres sont trop fréquentes dans les sciences pour avoir besoin d'excuse :

.... *Hanc veniam petimusque damusque vicissim* (1);

mais ce qui m'a un peu surpris, c'est que l'auteur a l'air de regarder cette propriété comme la solution du problème. Il ne s'aperçoit pas qu'en se donnant trois arcs qui satisfassent à l'équation (2), leurs tangentes ne remplissent les conditions du problème que d'une manière *algébrique*, et qu'il faut encore choisir ces arcs tels que leurs tangentes soient des nombres entiers. Or, il est impossible de deviner *a priori* quels sont les arcs (généralement incommensurables) qui jouissent de cette

---

(1) M. *De Montferrier* a été singulièrement malheureux dans les communications qu'il a bien voulu nous faire. Nous avons accepté avec toute confiance l'énoncé du problème n° 1, qui se trouve dans le cahier précédent de la *Correspondance*, page 136; mais nous nous sommes aperçus trop tard qu'il n'était pas plus nouveau que l'article dont il est ici question. Ce problème a été résolu en effet par *Lagrange* dans les *Mémoires de Berlin* pour 1776; et on en trouve encore une solutiou dans le *Traité du calcul intégral par Lacroix*, 2e vol. p. 430. A. Q.

propriété, et si dans l'exemple qu'il donne, M. *De Montferrier* n'avait su d'avance que $1 + 2 + 3 = 1 \times 2 \times 3$, il n'aurait certainement pas deviné qu'il lui fallait prendre pour x'' un arc de $71°.33'.54'',2$ et pour x''' un arc de $63°.26'.5'',8$, afin que leurs tangentes respectives fussent les nombres 2 et 3.

Essayons de résoudre ce problème par la simple algèbre : l'on peut donner à l'équation (2) la forme

$$A + B = (AB - 1)\,C \qquad (3)$$

Posant $A + B = p$, $AB = q$, A et B seront les racines de l'équation du second degré

$$x^2 - px + q = o.$$

En substituant à A + B et à AB leurs valeurs dans l'équation (3), il vient

$$p = (q - 1)\,C$$

et $$x^2 - (q - 1)\,Cx + q = o,$$

Résolvant cette équation par rapport à x

$$x = \frac{(q-1)\,C \pm \sqrt{(q-1)^2\,C^2 - 4q}}{2},$$

ce qui exige que l'on ait

$$(q - 1)^2\,C^2 > \quad \text{ou} \quad = 4q;$$

ou, en posant $$q - 1 = Q,$$

$$Q^2C^2 > 4Q + 4,$$

et il faut de plus que

$$Q^2C^2 - 4Q - 4 = \text{ un carré parfait } = Y^2.$$

Cette condition donne

$$Q = \frac{2 \pm \sqrt{4 + C^2 (Y^2 + 4)}}{C^2}. \qquad (4)$$

La quantité sous le radical devant être aussi un carré parfait,

$$4 + C^2 (Y^2 + 4) = U^2. \qquad (5)$$

En donnant à C une valeur particulière, on n'aura plus à résoudre qu'une équation indéterminée du second degré à deux inconnues que l'on pourra traiter par la méthode de *Lagrange*. (*Essai sur la théorie des nombres* § 17.) Il faut de plus, choisir C de telle manière que $\frac{2 + U}{C^2} = Q$ soit un nombre entier. Si l'on fait C = 1, l'équation (5) devient

$$Y^2 + 8 = U^2$$

et n'admet que la solution unique Y = 1, U = 3, d'où l'on conclut aisément, en remontant jusqu'à la valeur de x,

$$x = \frac{5 \pm 1}{3} = \begin{cases} 3 = A \\ \text{ou} \\ 2 = B \end{cases}$$

Du nombre des crimes et des délits dans les provinces du Brabant méridional, des deux Flandres, du Hainaut et d'Anvers, pendant les années 1826, 1827 et 1828, par A. Quetelet.

Il n'est point d'homme, pour peu qu'il soit observateur ou qu'il prenne quelqu'intérêt au sort de ses semblables, qui ne soit désireux de connaître les données statistiques qui concer-

nent le pays qu'il habite, ou même un pays avec lequel il aurait des rapports moins directs. Mais ces données ne sont pas seulement curieuses; elles deviennent véritablement utiles quand elles peuvent être rapprochées d'autres qui leur sont rigoureusement comparables; et que, par leur nombre et par la manière dont elles ont été recueillies, il devient très-probable que les écarts que l'on peut craindre, sont à peu près insensibles.

Nous manquions généralement de recherches statistiques sur les crimes qui se commettent dans le royaume, quand je publiai en 1827 (1), plusieurs documens sur nos prisons, d'après un grand travail manuscrit que M. le baron *de Keverberg* eut l'obligeance de me confier. J'ai pu donner depuis des détails plus développés, en faisant usage des documens du ministère de la justice (2); mais ces documens n'avaient été recueillis que pour une année. En les comparant néanmoins à ceux de la France et de l'Angleterre, avec toute la précaution qu'exigeait un semblable rapprochement, je suis parvenu à plusieurs résultats que je crois intéressans. Je sentais cependant le besoin de les vérifier; la constance que j'avais remarquée dans la reproduction de la plupart des nombres dont j'avais fait usage, m'avait singulièrement frappé, et en partant des principes des probabilités, je n'avais pas craint de dire, que «l'on passe d'une année à l'autre, avec la triste perspective de voir les mêmes crimes se reproduire dans le même ordre et attirer les mêmes peines dans les mêmes proportions...; mais, ajoutais-je, gardons-nous cependant de croire, s'il n'est pas en notre pouvoir d'arrêter brusquement le mal, qu'il soit impossible d'y remédier entièrement.» Ayant eu occasion de me procurer depuis les documens de la cour de Bruxelles, pour trois années consécutives, grâce à l'obligeance de M. *Destoop*, procureur-général, je m'empresse

---

(1) *Recherches sur la Population*, *les prisons*, etc. chez Tarlier, in-8o. Bruxelles.

(2) *Recherches statistiques sur le royaume des Pays-Bas*, chez Tarlier, à Bruxelles, in-8°, 1829.

de les soumettre à mes lecteurs; ils jugeront par eux-mêmes, si mon assertion était mal fondée. Comme ils pourraient cependant ne pas avoir mon dernier travail sous les yeux, j'aurai soin d'en rappeler les principaux résultats.

Je commencerai par donner, dans les 1[re] et 3[e] colonnes du tableau suivant, le nombre des accusés qui ont paru pendant les années 1826, — 27 et 28, devant les assises du Brabant méridional, des deux Flandres, du Hainaut et de la province d'Anvers; et j'établirai la distinction des crimes contre les personnes et contre les propriétés : les 2[e] et 4[e] colonnes font connaître les nombres respectifs des acquittés.

ANNÉES.	CONTRE LES PERS.	ACQUITTÉS.	CONTRE LES PROP.	ACQUITTÉS.
1826	134	29	350	38
1827	167	33	388	47
1828	165	30	382	46
TOTAUX	466	92	1120	131

Le nombre des habitans des cinq provinces dont il est ici question, s'élevait en 1827 et 1828, à 2662619 et 2689834 âmes; ce qui donne 1 accusé par 4800 et par 4900 habitans, nous en comptions 1 par 5193 habitans, en 1826.

Nous avions compté encore que sur 100 accusés, il s'en trouvait 28 accusés de crimes contre les personnes; nous en trouvons 30 pour 1827, *exactement* comme pour l'année 1828.

Nous disions enfin, pour 1826 : *sur* 100 *accusés*, 16 *seulement ont été acquittés chez nous, devant des juges; et* 35 *en France comme en Angleterre, où existe le jury*. Nous n'avions même trouvé que 14 acquittés devant la cour de Bruxelles; nous trouvons pour les années 1827 et 1828, *exactement comme pour* 1826, 14 acquittés par 100 accusés. On peut juger maintenant si les événemens se sont éloignés de nos conjectures.

Essayons avec les nombres précédens une quatrième épreuve. Nous avions remarqué, en comparant les données de la France à celles des Pays-Bas, que le *jury et les juges s'accordent sur ce*

point qu'ils acquittent beaucoup plus facilement les accusés de crimes contre les personnes ; sans doute, disions-nous, pour tempérer la sévérité des lois qui, souvent, restent sans effet par un excès de rigueur. On avait acquitté en effet, en 1826, 21 individus sur 100 accusés de crimes contre les personnes, et 11 sur 100 accusés de crimes contre les propriétés; les deux années suivantes s'accordent pour donner *deux fois de suite* les nombres 20 et 12, *qui sont presque identiquement les mêmes que les précédens.* La France avec son jury, présentait la même régularité de résultats, mais sur une autre échelle; elle avait acquitté consécutivement pendant deux années, 49 individus sur 100 accusés de crimes contre les personnes, et 34 et 31 sur 100 accusés de crimes contre les propriétés.

Nous ne croyons devoir entrer dans aucuns détails à l'égard de la nature des crimes et des délits; le tableau n° 1, qui accompagne cette note, nous a paru assez clair par lui-même. En le comparant au tableau analogue, que nous avons donné pour le royaume entier en 1826 (*Recherches statistiques*), on pourra faire plusieurs rapprochemens utiles que nous abandonnons à la sagacité du lecteur.

Sur les 42 individus condamnés à mort, que présente le tableau, 35 ont été présens au jugemens, les autres étaient contumaces; 14 ont été exécutés et 13 ont eu leur peine commuée en celle des travaux forcés à perpétuité ou à temps. On n'avait point encore prononcé sur le sort des autres.

Nous présenterons maintenant les nombres qui concernent les provinces prises isolément. Afin de faciliter les rapprochemens, nous faisons connaître les populations de ces provinces, pour l'année moyenne 1827, et nous avons présenté quelques rapports principaux qui pourront aider à juger de la répression, et des crimes qui se commettent. Cependant on ne doit pas perdre de vue que les écarts que peuvent présenter de pareils rapports, sont d'autant plus grands que les nombres sur lesquels ils sont fondés, sont en moindre quantité.

On remarquera sans doute, que le Brabant méridional et la Flandre orientale, ne se présentent pas sous un jour très-favo-

rable, et que les crimes contre les personnes y sont en grand nombre, quoique la répression y soit généralement forte; le contraire a lieu dans le Hainaut; cette province, comme nous avons déjà eu occasion de l'observer ailleurs, se distingue avantageusement sous plusieurs rapports.

COURS D'ASSISES. (1826-27 et 28.)	BRABANT mér.	FLANDRE orient.	FLANDRE occid.	HAINAUT.	ANVERS.
Population (1827)	494012	701035	573562	559858	334152
Cr. cont. les per. Accusations	79	94	62	30	37
— — Accusés	145	144	84	35	58
— — Acquittés	35	15	15	10	17
Cr. cont. les prop. Accusations	214	173	171	89	123
— — Accusés	321	265	224	122	188
— — Acquittés	32	50	9	18	22
Condamnés à mort	10	17	3	9	3
— aux tr. forc. à perp.	32	47	27	11	7
— — — à temps	104	86	68	19	34
— à la réclusion	139	111	100	47	58
— au carcan	»	»	»	2	»
— au bannissement	»	»	»	»	»
— à la dégrad. civique	1	»	3	»	»
— à des peines corr.	109	69	82	41	102
Enfans à détenir	5	4	4	»	3
Habitans pour 1 accusé	3180	5155	5682	10766	4075
Condamnés pour 100 accusés	86	84	92	82	84
Cr. cont. les pers. sur 100 crim.	31	35	27	22	23
Accusés pour 100 accusations	159	153	133	132	154

Si nous passons à ce qui concerne les tribunaux correctionnels et de simple police, nous trouvons en séparant les résultats des années, comme nous l'avons fait pour les cours d'assises :

	TRIBUNAUX CORRECT.			TRIB. DE SIMPLE POL.		
ANNÉES.	ACCUSAT.	PRÉVENUS.	ACQUITTÉS.	JUGEMENS.	PRÉVENUS.	ACQUITT.
1826	9112	12966	3435	5525	8470	1409
1827	9348	13793	2922	5074	8095	1277
1828	8872	13104	3454	5910	8858	1295
	27332	39863	9811	16509	25423	3981

Dans le nombre des prévenus en simple police, se trouvent compris 195 individus, à l'égard desquels les tribunaux se sont déclarés incompétens.

Nous déduisons du tableau précédent que, sur 100 prévenus devant les tribunaux correctionnels, on en a successivement condamné 74, 79 et 74; et devant les tribunanx de simple police 83, 85 et 86, comme en France. En ayant égard aux documens de ce dernier royaume et à ceux de l'Agleterre, nous avions trouvé que *quand* 100 *accusés paraissent devant des tribunaux soit criminels*, *soit correctionnels*, *soit de simple police*, 16 *sont acquittés s'ils ont affaire à des juges*, *et* 35 *s'ils ont affaire à un jury* (*Recherches statistiques*); les moyennes que nous avons trouvées précédemment pour les trois espèces de tribunaux, donnent une nouvelle confirmation de ce résultat. Cependant en isolant les nombres, la police correctionnelle semble dévier un peu et présente une répression moins forte, comme nous l'avions trouvé déjà pour le royaume entier.

Nous avions remarqué aussi que *les prévenus correctionnels avaient été, en France comme dans les Pays-Bas*, *vingt fois plus nombreux que les accusés criminels*. En rapprochant les nombres qui précèdent, nous trouvons que pour les provinces et les années que nous comparons, les prévenus correctionnels ont été 25, 23 et 23 fois plus nombreux que les accusés criminels. Les prévenus devant les tribunaux de simple police, ont été aussi régulièrement 17, 14 et 16 fois plus nombreux que ces mêmes accusés.

Nous n'avons pas encore parlé de l'association dans le crime; nous avions observé à cet égard, que *le rapport entre le nombre des affaires et celui des accusés qui y sont impliqués*, *présente aussi une constance remarquable*. Le rapport a été deux fois de suite de 100 à 144, pour la France; et pour ce royaume, il a été de 100 à 141 en 1826. Dans nos provinces, il a été trois fois de suite de 100 à 140, 140 et 150, pour les accusés devant les cours d'assises; de 100 à 142, 147 et 147, devant les tribunaux correctionnels; et de 100 à 149, 140 et 143, devant les tribunaux de simple police, sans comprendre parmi les prévenus

ceux pour lesquels les tribunaux se sont déclarés incompétens.

On pourra trouver dans le tableau n° II, de plus amples renseignemens sur tout ce qui concerne les tribunaux correctionnels; ce tableau est également formé sur le modèle de celui que nous avons donné dans les *Recherches statistiques*, auquel on pourra le comparer; nous avons seulement remplacé par l'énumération des acquittemens et des accusations, les détails sur les tribunaux de simple police, que nous allons présenter avec plus de développement que nous ne l'avions fait précédemment;

	JUGEMENS.	CONDAMNÉS.	ACQUITTÉS.	
Brabant méridional . .	4708	5896	1081	44
Flandre orientale. . .	3433	4349	698	22
Flandre occidentale . .	2733	3237	643	34
Hainaut.	4177	6268	1326	82
Anvers	1462	1497	233	13
Totaux pour 3 ans . .	16509	21247	3981	195

La dernière colonne comprend les individus pour lesquels les tribunaux se sont déclarés incompétens. La majeure partie des peines qui ont été prononcées étaient pécuniaires: on en a compté 18458 dans l'espace de trois ans.

Une des classifications les plus remarquables, est celle qui concerne les âges des accusés et des prévenus qui ont comparu devant les cours d'assises et les tribunaux correctionnels. Les deux premières colonnes qui suivent, se rapportent à nos cinq provinces, pour l'espace de trois ans; les deux dernières concernent la France, pour les années 1826 et 1827.

ÂGES.	CRIMES.	DÉLITS.	CRIMES.	DÉLITS.
moins de 16 ans	2	5	2	5
de 16 à 21 ans.	12	12	14	15
de 21 à 70 ans.	85	82	83	80
au-dessus de 70 ans	1	1	1	
	100	100	100	100

Je reproduirai ici un tableau plus complet, que j'ai dressé d'après les documens de France, pour 1826 et 1827. La dernière colonne indique combien sur un même nombre d'individus, de l'âge désigné dans la première colonne, il se trouve de criminels. Il a fallu dans le calcul, chercher, au moyen des tables de mortalité, comment la population française est divisée par âges, et tenir compte de ces nombres. Une table semblable, pourrait indiquer le penchant au crime aux différens âges de la vie, du moins pour la France, considérée dans son état actuel; car de grandes secousses politiques, des changemens dans les lois, le développement de l'instruction et d'autres circonstances doivent introduire dans une pareille table, des modifications très-sensibles. (*Recherches statistiques.*)

INDIVIDUS âgés de	CRIMES CONTRE les pers.	CRIMES CONTRE les prop.	CRIMES CONTRE les prop. sur 100 cr.	DEGRÉS DU PENCHANT au cr. aux diff. âges.
Moins de 16 ans.	50	210	81	40
16 à 21	452	1671	79	1197
21 à 25	681	1575	70	1676
25 à 30	775	1820	70	1640
30 à 35	566	1328	70	1295
35 à 40	338	969	74	972
40 à 45	289	867	75	945
45 à 50	234	615	73	773
50 à 55	146	394	72	560
55 à 60	88	255	74	418
60 à 65	92	195	67	434
65 à 70	54	88	62	287
70 à 80	31	59	65	170
80 et au-dessus	2	3	60	45

On voit que *c'est vers l'âge de 25 ans, que l'homme semble être le plus criminel.*

Si nous passons aux récidives, aux contumaces et aux indi-

CRIMES CC 28.)

NATURE DES CRIMES.	NOMI accusa-tions.	la radat. ique.	à des peines correct.	NOMBRE Des enfans à détenir dans une maison de correc-tion.
Concussion et corruption . .	5	»	2	»
Soustraction de deniers publics.	4	»	»	»
Incendie d'édifices	14	»	»	1
Incendie d'autres objets. . .	»	»	»	»
Destruct., dégrad. de prop., etc.	1	»	»	»
Fausse monnaie	6	»	2	»
Contrefaç. des sceaux, mart., etc.	2	»	»	»
Faux par supposition des person.	6	»	»	»
Faux en écriture de commerce .	9	»	3	»
Autres faux	33	»	4	»
Banqueroute frauduleuse . .	13	»	2	»
Vols dans les églises. . . .	4	»	»	»
Vols sur les chemins publics. .	17	»	2	»
Vols domestiques	163	»	66	1
Autres vols	492	»	185	8
Extorsion de lettres de change, obligations, etc.	»	»	»	»
Soustraction et suppression de titres et actes	1	1	»	»
Bris de scellés	»	»	»	»
Importation de march. prohib.	1	3	»	»
Crimes contre les propriétés. .	771	1 4	266	10
Crimes contre les personnes. .	302	»	133	6
TOTAUX	1073	1 4	399	16

…	Usure.	Contrav. aux lois sur les eaux et forêts.	Totaux des prévenus.	Totaux des accusations.	Totaux des acquittés.
…8	8	2154	11842	8580	2880
…7	1	710	9899	6525	2062
…8	1	840	8679	5808	2279
…4	3	1145	4880	3313	1422
…6	5	324	4563	3006	1168
…3	18	5173	39863		
…0	13	3394		27232	
…3	8	612			9811
1	»	»	1730		
…8	8	1806	13890		

vidus qui ont été repris plusieurs fois de justice (1), nous trouvons les nombres suivans qui se rapportent à la fois, aux crimes et aux délits.

	RÉCIDIVES.	CONTUMACES.	REPRIS PLUS. FOIS DE JUSTI.
Brabant méridional . . .	90	1215	627
Flandre orientale	152	225	198
Flandre occidentale . . .	518	403	151
Hainaut	83	870	100
Anvers	43	138	112
TOTAUX.	886	2851	1188

En comparant au nombre des accusés et des prévenus devant les tribunaux correctionnels, celui des individus qui ont été ou dans le cas de récidive, ou plusieurs fois repris de justice; on trouve le rapport de 1000 à 50. On trouve aussi sur 1000 accusés ou prévenus, 68 contumaces; en France, on en a compté 79 par 1000 accusés devant les cours d'assises, où le cas de contumace doit se réproduire en effet plus fréquemment comme le cas de récidive.

On pourrait être porté à croire, que la régularité dans le nombre des accusés, provient de ce qu'on ne juge qu'un certain nombre de causes annuellement; et que cette constance dans les résultats tient plutôt à la marche de la justice qu'à la succession des crimes. Cette observation est importante et mérite qu'on y ait égard; il faut donc examiner attentivement quelle est la marche de la justice. Voici les résultats recueillis

(1) Dans mes *Recherches statistiques*, page 36, en faisant les calculs pour 1826, je n'ai eu égard qu'au nombre de récidives 416, tandis que j'aurais pu compter encore les 1708 accusés qui déjà avaient été repris plusieurs fois de justice ; ce nombre comparé à celui des 31354 accusés donnait pour rapport 67 sur 1000 au lieu du nombre que j'avais obtenu. La France donne le rapport de 100 à 1000; mais comme je l'ai fait observer, les récidives en France ne sont indiquées que pour les crimes; et chez nous pour les crimes et les simples délits; ils doivent donc y être naturellement moins nombreux.

pour trois années, et pour les cinq provinces, dont il a été question dans tout ce qui précède.

		1826	1827	1828
(CHAMBRES DU CONSEIL.) Ordonnances rendues.	Dans le 1er mois du crime. . . .	969	864	1282
	Dans le 2e mois	353	408	413
	Dans le 3e mois	150	156	216
	Dans le 4e.	74	77	89
	Dans le 5e.	56	38	59
	Dans le 6e.	32	32	26
	Plus tard.	106	51	100
	TOTAUX.	1740	1626	2185
(TRIBUNAUX CORRECT.) Affaires jugées.	Dans le 1er mois du délit	3379	4561	4453
	Dans le 2e mois.	1588	2173	2109
	Dans le 3e	829	952	865
	Dans le 4e.	490	509	689
	Dans le 5e.	284	258	273
	Après un plus long délai. . . .	455	777	483
	TOTAUX.	7025	9230	8872
(COURS ET TRIB. D'APPEL.) Affaires jugées.	Dans le 1er mois de l'appel . . .	127	130	175
	Dans le 2e mois	139	136	116
	Dans le 3e	64	84	83
	Plus tard.	182	118	102
	TOTAUX.	512	468	476
(EXÉCUTION DES JUG.) Condamnés à l'empris., arrêtés ou écroués.	Avant le jugement.	2071	1689	1644
	Dans les 3 prem. mois de la cond.	2705	3083	3169
	Dans le 4e.	128	197	155
	Dans le 5e.	75	90	88
	Dans le 6e.	62	41	49
	Après un plus long délai. . . .	349	110	98
	Qui n'étaient pas écroués au 1er janvier.	441	598	767
	TOTAUX.	5831	5808	5970

Nous ajouterons aux renseignemens précédens, ceux qui concernent les cours d'appel du ressort de Bruxelles.

Confirmations des jug. d'acquittement.	87	74	87
» » de condamnation. . . .	202	214	206
Modifications qui condamnent des acquittés. .	43	43	45
» qui acquittent des cond.	43	41	51
» qui aggravent la peine.	23	51	38
» qui diminuent la peine	44	49	46
Jugemens portant déclaration d'incompét. . .	6	5	16
Total des arrêts ou jugemens.	445	477	489
Nouvelle comparution de témoins.	62	42	43

On a pu voir par les tableaux précédens, que les divers tribunaux agissent généralement dans le premier ou deuxième mois qui suit le crime ou le délit; et que le nombre des affaires différées, ne peut influer sensiblement sur les résultats que nous avons obtenus, surtout si l'on considère qu'il est impossible, dans un grand nombre de cas, d'instruire immédiatement, et qu'ainsi les affaires différées d'une année, sont compensées par celles d'une autre.

Je terminerai cette note par quelques renseignemens sur la justice commerciale du Brabant, pendant les années 1826 et 1827. Les jugemens ont été rendus par les tribunaux de commerce de Bruxelles et Louvain, et par le tribunal de première instance de Nivelles, siégeant comme tribunal de commerce.

	1826	1827
Affaires présentées au tribunal.	956	1033
» présumées avoir été conciliées	282	327
Jugemens levés.	717	800
Faillites terminées par concordat ou traité d'union. .	11	9
» qui sont encore suivies.	6	4
» n'offrant pas de ressources.	8	7
» rapportées.	»	»
Faillis mis en dépôt	»	1
Débiteurs écroués.	10	10

Sur les lignes aplanétiques. (Lettre de M. Chasles, au rédacteur. Voyez les deux livraisons précédentes.)

Vous avez fait, Monsieur, une chose fort utile et qui sera fort agréable à vos lecteurs, en les initiant dans vos découvertes singulières sur les *lignes aplanétiques*. Ces courbes méritent réellement d'être étudiées à fond; et leurs trois propriétés principales :

1° D'être les caustiques secondaires du cercle;

2° D'être les projections de l'intersection de deux cônes de révolution;

3° D'être les projections stéréographiques de l'intersection d'une sphère par un cône du second degré ;

Sans parler de celle d'où elles tirent leur nom, ces propriétés, dis-je, peuvent former chacune un chapitre étendu et fort intéressant; je verrai avec grand plaisir, que les géomètres répondent à votre appel en prenant part à l'étude de ces courbes ; il est vrai que leur portion de gloire sera bien faible, puisqu'il ne reste plus qu'à tirer des conséquences, par une discussion bien dirigée, de vos belles propositions.

Pour vous donner la preuve, Monsieur, que ce sujet m'a vivement intéressé depuis que vous m'avez fait l'honneur de m'en entretenir, et que j'ai pris plaisir à m'en occuper et à donner un bon exemple, je vais mettre en ordre un écrit sur les *Applications de votre théorie des caustiques*.

Ce que j'ai rencontré sur ce sujet, ce qui a fait l'objet des travaux de plusieurs géomètres et exigé des méthodes différentes et souvent pénibles, découlera naturellement de votre principe fondamental. Ce serait une preuve, si vous n'en aviez donné vous-même de nombreuses en le produisant, de son utilité et de son importance.

Une ligne aplanétique considérée comme une courbe du qua-

trième degré complète, a deux branches ainsi que vous l'avez fait voir. Ces deux branches sont la projection stéréographique de l'intersection complète d'une sphère et d'un cône du second degré. *Descartes*, qui s'est beaucoup occupé de ces courbes, mais seulement sous le rapport de la réfraction et comme application de sa nouvelle géométrie, et après lui *Newton*, et d'autres géomètres, n'avaient considéré qu'une seule branche, de sorte qu'il aurait semblé que cette seule branche représentait une courbe du quatrième degré complète. Sous ce rapport vos différens modes de description de ces courbes jettent un grand jour sur leur nature, puisque chacun donne une courbe complète.

La courbe étant considérée comme caustique secondaire par réflexion relative au cercle, l'une de ses branches se réduit à un point qui est le point rayonnant, et l'autre branche est une épicycloïde, ainsi que vous m'avez fait l'honneur de me le marquer.

J'ai reconnu que de plus elle est une conchoïde, ayant pour base un cercle, quelle que soit la position du point rayonnant; ce qui n'avait été démontré, je crois, que pour le cas où le point rayonnant est sur le cercle (par *De la Hire*).

La valeur inverse du rayon de cette conchoïde, est le rayon d'une conique ayant un foyer au point rayonnant; et réciproquement :

Si sur les rayons vecteurs d'une conique, on porte, à partir de leur origine (qui est un foyer de la conique), des lignes égales aux valeurs inverses de ces rayons, les extrémités de ces lignes appartiendront à une courbe qui sera en même temps une conchoïde à base circulaire, une épicycloïde, et une ligne aplanétique à une seule branche.

Vous avez trouvé, Monsieur, que pour une ligne aplanétique complète, deux rayons vecteurs menés par un foyer, ayant même direction et aboutissant respectivement aux deux branches de la courbe, ont un produit constant. (*Correspondance*, tome 5, page 4, 3°.)

En démontrant cette propriété, je me suis aperçu que si l'on

prend sur la direction commune de ces rayons, le point conjugué harmonique du foyer, par rapport aux extrémités des deux rayons, ce point a pour lieu géométrique, une conique dont un des foyers est le foyer de la courbe autour duquel tournent les rayons.

En outre : si l'on fait la somme des deux rayons et qu'on prenne sur leur direction, à partir du foyer, une ligne égale à l'inverse de cette somme, l'extrémité de cette ligne appartiendra à une conique ayant pour foyer celui de la courbe.

Si l'on circonscrit à l'une des branches de la courbe une conique qui soit en même temps inscrite dans l'autre branche, ou plus généralement, si l'on décrit des coniques qui aient chacune quatre points de contact (réels ou imaginaires), avec la courbe complète, toutes ces coniques auront leurs centres sur une même ligne du troisième degré.

Mais ces propriétés et d'autres, appartiennent à toutes les courbes du quatrième degré, qu'on peut considérer comme la projection de l'intersection de deux surfaces du second degré.

C'est pour cela qu'il m'a paru intéressant de considérer vos courbes dirimantes, comme la projection de l'intersection de deux cônes de révolution.

J'aurai l'honneur de vous entretenir dans un autre moment des courbes des troisième et quatrième degrés en général.

Sur les lignes aplanétiques. — Sur les lignes colorées que produit la polarisation dans les plaques de cristal. — Sur les spiriques ou sections annulaires, et en général sur les lignes du troisième degré; réponse du rédacteur à M. Chasles.

J'ai été très-flatté d'apprendre, Monsieur, que nous sommes entièrement de même avis sur l'importance que mérite l'étude des *lignes aplanétiques ;* je m'applaudis surtout de ce que mes recherches, que vous jugez avec trop d'indulgence, aient pu

vous déterminer à porter votre attention sur une branche des sciences que vos travaux ne tarderont pas à féconder. Vous avez enrichi la théorie des lignes du second degré ; vous ne tarderez pas à rendre le même service à la théorie des lignes du troisième et du quatrième, qui sont encore généralement si peu connues : cependant, je suis intimement convaincu que cette dernière théorie dépend presqu'entièrement de la première.

Les propriétés que vous énoncez à la fin de votre lettre, sont nouvelles pour moi ; je les ai lues avec beaucoup d'intérêt ; et je vous prie instamment de vouloir bien continuer à me tenir au courant de vos recherches. La propriété qu'a la caustique secondaire par réflexion relative au cercle, d'être une conchoïde à base circulaire, m'était déjà connue depuis long-temps ; j'en ai même parlé avec assez de développement dans mon premier Mémoire sur les caustiques (*Mém. de l'Acad. de Brux. t. III*). Comme ce travail ne vous est pas connu, et que les recueils périodiques qui en ont fait mention, se sont bornés à annoncer la proposition fondamentale ; je rappellerai ici quelques-unes des propriétés principales que j'ai reconnues.

Je commence par démontrer l'identité des *caustiques secondaires par réflexion dans le cercle*, des *épicycloïdes* et des *conchoïdes circulaires ;* parmi les différentes générations de ces lignes, la plus simple est la suivante : d'un point d'une circonférence, on mène autant de cordes que l'on voudra, et l'on prolonge ou l'on diminue ces cordes d'une quantité constante que nous nommerons *module*, tous les points de division seront sur la conchoïde circulaire. Cette génération qui vous est très-bien connue, conduit à l'équation polaire suivante :

$$\rho = 2 \cos. \alpha + m ;$$

le rayon du cercle est pris pour unité, m est le module et α est l'angle compris entre le rayon vecteur ρ et le diamètre. J'ai fait connaître une construction très-simple des tangentes, celles des rayons de courbure ; et en général ce qui se rapporte aux quadratures, à la rectification ainsi qu'aux surfaces et aux volu-

mes de révolution de ces lignes autour de leurs diamètres; voici quelques-uns des principaux résultats :

1° La surface des conchoïdes circulaires, en y comprenant le nœud, vaut deux fois la surface du cercle générateur, plus la surface d'un autre cercle d'un rayon égal au module;

2° Le contour de ces lignes vaut celui d'une ellipse, le demi-grand axe étant égal au diamètre du cercle générateur, plus le module, et le demi-petit axe étant égal à ce même diamètre, moins le module;

3° Le volume de révolution est au volume de la sphère construite sur le diamètre de la courbe, comme ce diamètre est au diamètre du cercle générateur. Le volume produit par le nœud a une expression également simple;

4° La surface de révolution vaut deux fois la surface de la sphère engendrée par la circonférence du cercle générateur, plus l'aire d'une sphère d'un rayon égal au module.

J'ai démontré encore que ces lignes ont des *foyers* qui sont des points analogues aux foyers dans les sections coniques; et j'ai fait voir que leurs projections stéréographiques sur la sphère, sont les lignes de pénétration de la sphère et d'un cône dont le sommet est à la surface. Ces dernières propriétés ont été surtout traitées avec élégance, par M. *Dandelin,* dans ses Mémoires *sur les propriétés de la focale* et *sur les intersections de la sphère et d'un cône du second degré* (*Mém. de l'Acad.*, tom. III et IV). On doit à ce géomètre des rapprochemens très-ingénieux entre les conchoïdes circulaires et les sections coniques; son travail établit de la manière la plus curieuse les analogies qui existent entre ces courbes. Vous pourrez voir encore différentes applications de la même théorie, que j'ai insérées dans la *Correspondance*, tome II, page 81, et tome III, page 228. Parmi les théorèmes que j'ai fait connaître, il en est un, sur lequel j'ose appeler votre attention, parce qu'il ne paraît pas jusqu'à présent qu'on y ait eu égard, et cependant, il lie intimement la théorie des caustiques à celle des polaires qui offre des moyens si puissans pour étudier les propriétés des courbes. Voici ce théorème : *Si l'on construit la polaire réciproque d'une courbe*

quelconque Σ, *par rapport à un cercle C, et si l'on prend cette polaire réciproque pour base d'un cône dont le sommet serait sur la sphère dont C est un grand cercle, et à l'extrémité du diamètre perpendiculaire au plan commun des courbes, ce cône percera la sphère selon une ligne à double courbure, qui jouit de la propriété d'être aussi la ligne de pénétration de la sphère par un second cône, dont le sommet serait à l'autre l'extrémité du diamètre, et qui aurait pour base la caustique secondaire d'une courbe* Σ' *semblable à la proposée* Σ*; le point rayonnant étant au centre du cercle C, et les rayons vecteurs des deux lignes* Σ *et* Σ' *étant dans le rapport de* 2 à 1. Ce théorème est un cas particulier d'un autre qui s'étend aux caustiques secondaires par réfraction, et que je suis parvenu à démontrer d'une manière très-élémentaire dans un Mémoire dont je m'occupe en ce moment.

Peut-être ne verrez-vous pas sans intérêt, que les lignes aplanétiques ne sont pas les seules qu'on puisse considérer avec avantage comme les projections de l'intersection de deux surfaces du second degré. J'ai eu occasion de considérer d'autres courbes qui sont assez remarquables en optique; ce sont les lignes colorées qu'on aperçoit, en analisant un faisceau de rayons polarisés convergens, qui ont traversé des plaques d'arragonite ou de nitrate de potasse, taillées perpendiculairement à la ligne moyenne qui divise en deux l'angle des axes de ces cristaux. M. *Herschel* a trouvé que les courbes d'égale teinte sont alors des *lemniscates* dont l'équation générale est

$$(x^2+y^2+a^2)^2 = a^2(b^2+4x^2); \qquad (1)$$

$2a$ est la distance des pôles, et b est un paramètre variable de zéro à l'infini.

Or, si l'on considère l'équation précédente comme provenant de l'élimination d'une variable entre deux équations à trois inconnues, nous pourrons écrire

$$x^2+y^2+a^2=a^2z\,;\ b^2+4x^2=a^2z^2 \qquad (2)$$

la première de ces équations représente un paraboloïde de révolution autour de l'axe des z; et la seconde, un cylindre à base hyperbolique, dont le grand axe coïncide avec celui du paraboloïde. Nos courbes sont donc les projections orthogonales de l'intersection du paraboloïde fixe, avec une nappe de l'hyperboloïde variable par le parmètre b. Cette nappe peut dégénérer en deux plans quand $b = o$; et ces plans touchent alors le paraboloïde en deux points qui ont, pour projections, les *foyers* communs des courbes. Toute cette discussion est trop facile pour qu'il soit nécessaire de s'y arrêter; nous en déduirons cependant une construction graphique très-simple des *lemniscates, qu'on peut regarder comme les intersections successives d'une circonférence par deux droites parallèles;* c'est ce qu'on voit évidemment, si l'on coupe les deux surfaces (2), par une série de plans perpendiculaires à l'axe des z.

Les lemniscates, du reste, forment un cas particulier des lignes *spiriques*, ou sections qu'on obtient en coupant un *tore* ou une *surface annulaire* par un plan : ces dernières courbes étaient connues des anciens (voyez la *Correspond. mathém.*, tome II, p. 237). M. *Pagani* a discuté dans les *Mém. couronnés* de l'Acad. de Bruxelles, l'équation générale des spiriques, qui a la forme suivante

$$(y^2+x^2+a^2-R^2-R'^2)^2=4R'^2\left[R^2-(a\sin.\theta+x\cos.\theta)^2\right];$$

R est le rayon du cercle générateur de la surface annulaire; R', la distance du centre de ce cercle à l'axe de circonvolution, θ l'angle formé par cet axe avec l'axe de x, et a la distance du plan coupant à celui des x,y.

En suivant une marche analogue à celle qui a été suivie précédemment, nous verrons que les spiriques peuvent être considérées comme les projections orthogonales, de l'intersection d'un paraboloïde de révolution par une autre surface du second degré; leurs équations sont

$$y^2+x^2+a^2-R^2-R'^2=R'^2z;\ 4[R^2-(a\sin.\theta+x\cos.\theta)^2]=R'^2z^2.$$

Du reste, toutes les lignes du troisième et du quatrième degré peuvent être considérées comme les projections de la ligne de pénétration de deux surfaces du second degré; et c'est sous cette forme qu'il faut les considérer, je pense, si l'on cherche à répandre quelque lumière sur leur théorie; seulement il faudra choisir la forme de projection la plus avantageuse pour faire ressortir facilement leurs propriétés. Je me contenterai de donner pour exemple, les lignes du troisième degré, dont l'équation générale est

$$ay^3 + bxy^2 + cx^2y + dx^3$$
$$= -[ey^2 + fxy + gx^2 + hy + ix + k].$$

Sans que ces courbes changent de forme, on peut, en déplaçant l'origine des coordonnées, et en donnant aux axes rectangulaires une autre direction, faire évanouir dans l'équation précédente les trois premiers termes du premier membre, ou seulement un ou deux d'entre eux. Si, par exemple, en faisant varier l'inclinaison des axes, on fait disparaître le premier terme, les deux parties restantes de l'équation pourront être égalées à xz, et l'on aura :

$$b'y^2 + c'xy + d'x^2 = z,$$
$$e'y^2 + f'xy + g'x^2 + h'y + i'x + k' = -xz.$$

La première équation est d'une forme très-simple; elle pouvait cependant devenir plus simple encore par un déplacement de l'origine, en vertu duquel on aurait fait disparaître encore les coefficiens b' ou c', ou même ces deux coefficiens en même temps; ce qui aurait donné cette équation

$$d'x^2 = z,$$

pour l'une de nos deux surfaces. On voit aisément qu'elle appartient à un cylindre qui a pour base une parabole dont le sommet est à l'origine, et dont le grand axe coïncide avec

l'axe des z. Ce qui montre encore, en coupant les deux surfaces par une série de plans parallèles à celui des xy, que *les courbes du troisième degré peuvent être considérées comme le lieu des intersections d'une section conique dont un paramètre est variable, par un système de droites parallèles.* Ce paramètre serait évidemment ici le coëfficient de x dans la seconde de nos équations. La courbe du second degré qui sert de base est une section conique facile à reconnaître, et aidera à établir une distinction semblable à celle que *Newton* a faite dans son *Enumeratio linearum tertii ordinis.*

Il suffit dans la théorie d'avoir reconnu la possibilité des transformations précédentes ; mais si l'on voulait faire le calcul pour parvenir aux réductions que nous avons indiquées, on pourrait être conduit à des résultats très-compliqués. La transformation qui se prêtera le mieux au calcul est celle qui consiste à faire disparaître le terme constant de l'équation du troisième degré, en déplaçant simplement l'origine le long d'un des deux axes; on pourra alors opérer la séparation de l'équation en deux parties dont chacune étant égalée à yxz, donnera :

$$a'y^2 + e'y + h' = xz.$$
$$b'y^2 + c'yx + d'x^2 + f'y + g'x + i' = -yz.$$

Du reste, je sens parfaitement que ce qui vient d'être dit nécessite des développemens pour qu'on conçoive bien toute l'utilité qu'on peut retirer de semblables considérations.

Correspondance et annonces scientifiques.

M. *Lobatto*, vient de confirmer par les documens de dix années, et pour tout notre royanme, les lois des naissances et des décès, que nous avions observées pour Bruxelles, et que M. *Villermé* avait déjà vérifiées de son côté, par plus de 12 millions d'observations, recueillies sur différens points du globe. Voici ses résultats qui sont à peu près identiquement les mêmes que les nôtres.

	NAISSANCES.	DÉCÈS.
Janvier	1,091	1,196
Février	1,171	1,177
Mars	1,117	1,171
Avril	1,017	1,098
Mai	0,934	0,978
Juin	0,876	0,897
Juillet	0,851	0,833
Août	0,915	0,826
Septembre	0,993	0,890
Octobre	1,003	0,937
Novembre	1,011	0,952
Décembre	1,021	1,043

Il est donc bien établi que c'est pendant les mois d'hiver, que nous comptons le plus de naissances et de décès; et que c'est pendant les mois d'été, au contraire, que nous en comptons le moins.

— Depuis quelque temps, une anomalie se fait ressentir à Bruxelles, dans la loi de la mortalité; elle atteint particulièrement les enfans: d'après les registres de l'état-civil, 107 sont morts de la rougeole, dans le seul mois de mars. On sera peut-être

curieux de rapprocher les résultats de cette année, de ceux des années précédentes ; les voici :

MOIS DE MARS.	NAISSANCES.		DÉCÈS.		TOTAUX DES
ANNÉE.	GARÇONS.	FILLES.	HOMMES.	FEMMES.	DÉCÈS.
1827	194	187	131	131	262
1828	184	173	140	131	271
1829	195	204	227	195	422

— M. *Gambier*, précédemment professeur de mathématiques au collége de Louvain, vient d'ouvrir dans le local du Musée de cette ville, des cours publics et gratuits d'analise transcendante. Nous espérons que par ses efforts pour la propagation des sciences, il trouvera de nombreux auditeurs qui sauront apprécier son désintéressement et profiter de ses lumières.

— M. *Engelspach-Larivière* vient d'être appelé à remplir comme professeur, une chaire de géologie, au Musée de cette ville. On sait que l'Académie Royale des sciences a couronné depuis peu, un Mémoire de ce naturaliste, sur la minéralogie de la province de Luxembourg.

— On annonce à Louvain une souscription pour la *propagation économique des bons livres*. Chaque sociétaire recevra un exemplaire de tous les ouvrages que la société fera publier pendant le courant de l'année, moyennant une rétribution de 6 florins (12 fr. 70 c.), 12 volumes seront publiés annuellement, contenant ensemble au moins 120 feuilles, et présentant la matière de 12 volumes, édition de France, d'une valeur de 60 à 75 fr. Nous souhaitons que cette utile entreprise, obtienne le succès qu'elle mérite, et qu'on prête à ceux qui la forment des intentions plus louables que celles qu'on a prêtées aux fondateurs d'une société semblable qui s'était organisée à Bruxelles, il y a deux à trois ans.

— M. *G. Weiler* vient d'obtenir à l'Université de Louvain, le grade de docteur en sciences ; il avait pris pour sujet de sa

dissertation : l'*Esprit du calcul différentiel*. En examinant les méthodes diverses qui ont été suivies par les savans, M. *Weiler* a été conduit à parler des derniers travaux de notre compatriote M. le Commandeur *de Nieuport*, et a rendu un hommage mérité à la mémoire de ce mathématicien distingué, auquel nous regrettons de ne pas avoir encore payé le tribut de reconnaissance que nous lui devons à tant de titres. Nous ne devons pas omettre de dire que M. *Weiler* a dédié sa dissertation à M. *Noël*, de Luxembourg, son ancien professeur. De pareils hommages honorent à la fois l'élève et le maître.

— Nous venons de recevoir les deux premiers volumes d'un traité de mécanique appliquée, *Gronden der toegepaste werktuigkunst*, etc., composé par M. *Verdam*, pour servir de texte aux leçons qu'il donnait précédemment à l'Université de Groningue, en qualité de lecteur. Cet ouvrage étant particulièrement destiné aux industriels, ne contient que les premiers principes de la science, exposés sous leur forme la plus simple et développés par de nombreux exemples. Le premier volume de 171 pages, sert d'introduction; on y trouve les élémens de l'arithmétique, les premières opérations de l'algèbre et toute la géométrie élémentaire. La première section du second volume contient les propositions les plus simples sur les forces et les mouvemens, les centres de gravité, les chocs et les frottemens. Nous avons cet ouvrage depuis trop peu de temps pour avoir pu le lire avec toute l'attention qu'il mérite; aussi nous avons moins cherché à exprimer ici un jugement qu'à donner une simple annonce. Nous aurons soin de revenir avec plus de détail sur cette publication, quand la seconde section du second volume aura paru. L'ouvrage de M. *Verdam*, écrit dans le même but que ceux de MM. *Dandelin*, *Lemaire* et *Pagani*, contribuera sans doute, de son côté, à populariser chez nous les premiers élémens de la mécanique et à détruire les préjugés qui existent encore contre les prétendues difficultés qu'offre cette science.

— *Le bulletin des sciences géographiques*, pour janvier 1829, contient un article intéressant sur l'exportation des machines à

vapeur de la Grande-Bretagne. Voici quelques résultats tirés des tableaux qui ont été soumis au parlement :

		1825.	1826.	1827.
Russie.	liv. sterl.	1880	2103	1902
Suède.		173	776	212
Norwége.		62	160	265
Danemarck		117	192	100
Prusse		142	67	1088
Allemagne		492	3716	4371
Pays-Bas.		9521	18432	46156
France		18878	42782	69765
Portugal, Açores et Madère. .		1477	1034	647
Espagne et Canaries. . . .		2846	874	1024
Italie		929	2918	5704

on aura probablement remarqué l'accroissement des importations faites dans les Pays-Bas, malgré le grand nombre de machines qui ont été construites dans notre royaume. On estime en effet, que sur 70 à 74 machines à vapeur qui se trouvent dans la seule ville de Gand, près des deux tiers ont été construites à Liége ou dans les environs.

QUESTION.

De tous les quadrilatères inscrits dans un rectangle, celui de moindre contour est un parallélogramme, ayant ses côtés respectivement parallèles aux diagonales du rectangle proposé; et il existe une infinité de quadrilatères inscrits de même contour *minimum*, ce *minimum* étant la somme des diagonales du rectangle (M. *Noël*).

Mémoire sur les fonctions semblables de plusieurs groupes d'un certain nombre de fonctions ou élémens; par M. le docteur Reiss, de Francfort.

I.

Soient les groupes

$$\begin{array}{ccccc} a^\alpha & a^\beta & a^\gamma & \ldots & a^\rho \\ b^\alpha & b^\beta & b^\gamma & \ldots & b^\rho \\ c^\alpha & c^\beta & c^\gamma & \ldots & c^\rho \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ r^\alpha & r^\beta & r^\gamma & \ldots & r^\rho ; \end{array}$$

soit le nombre des $a, b, \ldots r = n$ et celui des $\alpha, \beta, \ldots \rho = \nu$. Distinguons ces deux espèces de signes par les noms de *bases* et d'*exposans;* et indiquons l'ordre suivant lequel ils sont rangés, par *les échelles*

$$\begin{pmatrix} a & b & c & \ldots & r \\ 1 & 2 & 3 & \ldots & n \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \ldots & \rho \\ 1 & 2 & 3 & \ldots & \nu \end{pmatrix}$$

au moyen desquelles on déterminera la place que chaque élément occupe dans les séries verticales et horizontales. Les signes a^α, a^β, ... pourront ne désigner que des quantités tout-à-fait indépendantes les unes des autres, ou bien ils seront des fonctions quelconques de a et α, de a et β, etc. Dans le premier cas les exposans ne seraient que des signes de distinction, et pourraient être remplacés par des nombres dont l'ordre est en général complétement arbitraire.

Si ω désigne une fonction de quelques-uns de ces élémens, ou simple ou renfermant encore d'autres quantités que a^α, a^β, ...; on pourra former une certaine quantité de fonctions sembla-

bles à ω, soit en échangeant successivement chaque exposant qui y entre avec tous les autres de l'échelle, soit en y échangeant les bases, soit enfin en y échangeant tous les deux à la fois. Le nombre de ces fonctions semblables dépendra donc du nombre des bases et des exposans, et de la forme de ω elle-même.

Entre toutes les formes qu'on peut donner à ω, il y en a qui se distinguent par leur symétrie et par la facilité avec laquelle on trouve leurs relations respectives. Elles me paraissent d'un grand intérêt tant pour la théorie des équations (où elles serviraient, par exemple, à trouver des relations entre les n racines de l'équation $o = x^n + Ax^{n-1} + \ldots + N$, partagées chacune en ν parties quelconques) que pour la géométrie analytique, où elles nous feraient connaître (en faisant $\nu = \zeta$) les relations entre les coordonnées de n points.

Voici la formation de ces fonctions. Supposons que n soit $= \nu$; et faisons, suivant la règle ordinaire, *les permutations* de tous les exposans, de façon que $\alpha, \beta, \ldots \rho$ en soit la première et $\rho \ldots \beta, \alpha$ la dernière. Soit maintenant le produit $a^\alpha . b^\beta . c^\gamma \ldots r^\rho$; remplaçons y l'ordre $\alpha, \beta, \ldots \rho$, successivement par celui de toutes les autres permutations (en sorte que le dernier produit soit $a^\alpha \ldots r^\rho$) et donnons au premier de ces produits le signe $(+)$. Cela fait, déterminons généralement le signe du Mme produit (soit $\dot{M}$) de la manière suivante. Le nombre M sera renfermé entre les produits $1.2.3 \ldots l$ et $1.2.3 \ldots l(l+1)$; soit $M = m + \lambda \times 1.2.3 \ldots l$, de sorte que $\lambda < l+1$, et $m > o$ et $< 1 + 1.2.3 \ldots l$. Cela étant, faisons $\dot{M} = \dot{m} . (-1)^\lambda$. Ce dernier signe se déterminera d'une manière semblable, et ainsi de suite. C'est pour la somme algébrique de tous ces produits que je vais établir quelques théorèmes. Désignons-la par

$$(abc \ldots r, \overline{\alpha\beta\gamma \ldots \rho}).$$

Remarquons que les bases sont ici écrites à gauche et séparées des exposans par une virgule. Le tiret sur $\alpha, \beta, \ldots \rho$ indique que ce sont les exposans dont il faut faire les permutations. Si

l'on fait au contraire celles des bases et qu'on les substitue successivement dans le produit $a^\alpha . b^\beta \ldots r^\rho$ au lieu de $a, b, \ldots r$, je désignerai la somme algébrique de tous ces produits par

$$(\overline{abc \ldots r}, \alpha\beta\gamma \ldots \rho).$$

Soit, par exemple, $n = 3$ et $\alpha = 1$; $\beta = 2$, $\gamma = 3$; nous trouverons $(\overline{abc}, \overline{123}) =$

$$a^1b^2c^3 - a^1b^3c^2 - a^2b^1c^3 + a^2b^3c^1 + a^3b^1c^2 - a^3b^2c^1.$$

II.

Avant d'aller plus loin, faisons encore la détermination suivante. Soit ω une fonction quelconque dans laquelle les k quantités A, B, C, ... A^k entrent d'une manière quelconque. Supposons que ces dernières soient les k premières de l'échelle $\begin{pmatrix} ABC \ldots A^k \ldots S \\ 1\,2\,3 \quad k \quad s \end{pmatrix}$. Qu'on fasse avec ces s élémens *toutes les combinaisons sans répétition de la classe k*, et qu'on les substitue successivement au lieu de A, B, ... A^k dans la fonction ω; c'est-à-dire le premier élément de chaque combinaison à A, le second à B, etc. Nous obtiendrons par là autant de fonctions semblables à ω qu'il y a de combinaisons de la classe k de s élémens. Or, entre toutes les combinaisons qui en précèdent une quelconque, il s'en trouvera une qui aura $k - 1$ élémens communs avec elle, tandis que les deux élémens qui restent isolés dans l'une et l'autre se suivent immédiatement dans l'échelle. Donnons à la fonction qui contient la dernière de ces combinaisons le signe opposé à celui de l'autre fonction; par conséquent les signes de toutes les fonctions semblables à ω seront parfaitement déterminés, et dépendront du signe de la première fonction (f(A, B, C, ... A^k)). Soit, par exemple, $s = 5$; $k = 3$; nous aurons successivement, en remplaçant

A, B, C, .. S par 1, 2, 3, 4, 5, et en donnant le signe (+) à $f(123)$,

$$+f(123),\ -f(124),\ +f(125),\ +f(134),\ -f(135),$$
$$+f(145),\ -f(234),\ +f(235),\ -f(245),\ +f(345).$$

Voici comment on déterminera le signe de chaque fonction semblable à ω d'après celui d'une autre quelconque. Qu'on cherche les nombres qui se trouvent dans l'échelle $\begin{pmatrix} ABC \ldots A^k \ldots S \\ 1\,2\,3 \ldots k \ldots s \end{pmatrix}$ sous les élémens de l'une et de l'autre de ces fonctions. Si l'on nomme h et h' leurs sommes respectives, on trouvera le signe de l'une des fonctions $= (-1)^{h'-h} \times$ le signe de l'autre.

Si $s = 2k$, les fonctions semblables à ω contiendront deux à deux l'une arbitrairement k des élémens, et l'autre les k élémens qui ne se trouvent pas dans la première. On a alors évidemment $h' = k(2k+1) - h$, et $h' - h = k(2k+1) - 2h$; par conséquent, si k est un nombre pair, les deux fonctions en question seront de même signe, et si k est impair, elles seront de signe contraire.

III.

Théorèmes Fondamentaux.

Théorème I. On a généralement

$$(abc \ldots r, \overline{\alpha\beta\gamma \ldots '\rho\rho}) = a^\alpha (bc \ldots r, \overline{\beta\gamma \ldots '\rho\rho})$$
$$- a^\beta (bc \ldots r, \overline{\alpha\gamma \ldots '\rho\rho}) + a^\gamma (bc \ldots r, \overline{\alpha\beta \ldots '\rho\rho})$$
$$- \ldots \pm a^\rho (bc \ldots r, \overline{\alpha\beta\gamma \ldots '\rho}); \quad \ldots \quad \text{(I)}$$

et

$$(\overline{abc \ldots 'rr}, \alpha\beta\gamma \ldots \rho) = a^\alpha (\overline{bc \ldots 'rr}, \beta\gamma \ldots \rho)$$
$$- b^\alpha (\overline{ac \ldots 'rr}, \beta\gamma \ldots \rho) + c^\alpha (\overline{ab \ldots 'rr}, \beta\gamma \ldots \rho)$$
$$- \ldots \pm r^\alpha (\overline{abc \ldots 'r}, \beta\gamma \ldots \rho); \quad \ldots \quad \text{(II)}.$$

Cette propriété se découvre très-facilement si l'on remonte à la formation des fonctions $(ab \,..\, r, \alpha\beta \,..\, \rho)$ et $(ab \,..\, r, \alpha\beta \,..\, \rho)$, et si l'on fait attention à la manière dont nous y avons déterminé le signe de chaque terme.

Corollaire I. Les termes $a^\rho\,(b \,..\, r, \overline{\alpha\beta \,..\, '\rho})$ et $r^\alpha\,(\overline{ab \,..\, 'r}, \beta\gamma \,..\, \rho)$ auront le signe $(-)$ ou $(+)$, selon que le nombre n (ou ν) est pair ou impair. Soit en général

$$\text{l'échelle des exposans}\ \begin{pmatrix} \alpha\beta.. & '\Lambda & \Lambda & \Lambda' & ...\rho \\ 12..\lambda - 1, & \lambda, & \lambda + 1 & ... & \nu \end{pmatrix}$$

$$\text{l'échelle des bases}\ \begin{pmatrix} ab.. & 'L & L & L' & ...r \\ 12..l - 1, & l, & l + 1 & ... & n \end{pmatrix}$$

on trouvera le signe de $a^\Lambda\,(bc \,..\, r, \overline{\alpha \,..\, '\Lambda\Lambda' \,..\, \rho}) = (-1)^{\lambda+1}$, et celui de $L^\alpha\,(\overline{ab \,..\, 'LL' \,..\, r}, \beta\gamma \,..\, \rho) = (-1)^{l+1}$.

Corollaire II. Les termes de l'équation (I) renfermant tous des facteurs de la même forme que $(ab \,..\, r, \alpha\beta \,..\, \rho)$, on pourra encore isoler la base b qui s'y trouve la première. Si l'on réunit après le développement tous les termes qui sont multipliés par $b^\alpha, b^\beta, \ldots$ on trouvera

$$\begin{aligned}
&(abc \ldots r, \overline{\alpha\beta\gamma \ldots \rho}) = \\
&\quad - b^\alpha\,[a^\beta\,(c \,..\, \overline{r, \gamma \,..\, \rho}) - a^\gamma\,(c \,..\, \overline{r, \beta \,..\, \rho}) \pm \ldots] \\
&\quad + b^\beta\,[a^\alpha\,(c \,..\, \overline{r, \gamma \,..\, \rho}) - a^\gamma\,(c \,..\, \overline{r, \alpha \,..\, \rho}) \pm \ldots] \\
&\quad - b^\gamma\,[a^\alpha\,(c \,..\, \overline{r, \beta \,..\, \rho}) - a^\beta\,(c \,..\, \overline{r, \alpha \,..\, \rho}) \pm \ldots] \\
&\quad \pm \ldots\ldots = - b^\alpha\,(ac \,..\, r, \overline{\beta\gamma \,..\, \rho}) + b^\beta\,(ac \,..\, r, \overline{\alpha\gamma \,..\, \rho}) \\
&\quad - b^\gamma\,(ac \,..\, r, \overline{\alpha\beta \,..\, \rho}) \pm \ldots\ldots = -(bac \,..\, r, \overline{\alpha\beta\gamma \,..\, \rho}).
\end{aligned}$$

Nous tirons de là $(abc \,..\, r, \overline{\alpha\beta\gamma \,..\, \rho}) =$

$$\begin{aligned}
&+ b^\alpha(ca \,..\, \overline{r, \beta\gamma \,..\, \rho}) - b^\beta\,(ca \,..\, \overline{r, \alpha\gamma \,..\, \rho}) + b^\gamma(ca \,..\, \overline{r, \alpha\beta \,..\, \rho}) \mp \ldots \\
&= - c^\alpha(ba \,..\, \overline{r, \beta\gamma \,..\, \rho}) + c^\beta(ba \,..\, \overline{r, \alpha\gamma \,..\, \rho}) - c^\gamma(ba \,..\, \overline{r, \alpha\beta \,..\, \rho}) \pm \ldots \\
&= + c^\alpha(ab \,..\, \overline{r, \beta\gamma \,..\, \rho}) - c^\beta\,(ab \,..\, \overline{r, \alpha\gamma \,..\, \rho}) + c^\gamma(ab \,..\, \overline{r, \alpha\beta \,..\, \rho}) \mp \ldots
\end{aligned}$$

On voit qu'on a généralement

$$(abc \ldots r, \overline{\alpha\beta\gamma \ldots \rho}) = (-1)^{l+1} L^{\alpha} (a \ldots 'LL' \ldots r; \overline{\beta\gamma \ldots \rho})$$
$$-(-1)^{l+1}L^{\beta}(a \ldots 'LL' \ldots \overline{r, \alpha\gamma \ldots \rho}) + (-1)^{l+1}L^{\gamma}(a \ldots 'LL' \ldots \overline{r, \alpha\beta \ldots \rho}) \mp \ldots$$

Or, on trouve de la même manière, au moyen de l'équation (II),

$$\overline{(abc \ldots r}, \alpha\beta\gamma \ldots \rho) = (-1)^{\lambda+1} a^{\Lambda} (\overline{bc \ldots r}, \alpha \ldots '\Lambda\Lambda' \ldots \rho)$$
$$-(-1)^{\lambda+1} b^{\Lambda}(\overline{ac \ldots r}, \alpha \ldots '\Lambda\Lambda' \ldots \rho) + (-1)^{\lambda+1} c^{\Lambda}(\overline{ab \ldots r}, \alpha \ldots '\Lambda\Lambda' \ldots \rho) \mp \ldots$$

Théorème II. On a généralement

$$(abc \ldots r, \overline{\alpha\beta\gamma \ldots \rho}) = \overline{(abc \ldots r}, \alpha\beta\gamma \ldots \rho)$$

Supposons que cette identité ait lieu pour des fonctions qui renferment $(n-1)$ bases et exposans, et démontrons qu'elle existe également pour n de ces élémens. Nous trouvons, en isolant successivement toutes les bases, $n \times (abc \ldots r, \overline{\alpha\beta\gamma \ldots \rho})$

$$= + a^{\alpha}(bc \ldots r, \overline{\beta\gamma \ldots \rho}) - a^{\beta}(bc \ldots r, \overline{\alpha\gamma \ldots \rho}) + a^{\gamma}(bc \ldots r, \overline{\alpha\beta \ldots \rho}) \mp \ldots$$
$$- b^{\alpha}(ac \ldots r, \overline{\beta\gamma \ldots \rho}) + b^{\beta}(ac \ldots r, \overline{\alpha\gamma \ldots \rho}) - b^{\gamma}(ac \ldots r, \overline{\alpha\beta \ldots \rho}) \pm \ldots$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$
$$(-1)^{l+1}L^{\alpha}(a \ldots r, \overline{\beta \ldots \rho}) - (-1)^{l+1}L^{\beta}(a \ldots r, \overline{\alpha \ldots \rho}) + (-1)^{l+1}L^{\gamma}(a \ldots r, \overline{\alpha \ldots \rho}) \pm \ldots$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

somme dans laquelle chacune des séries horizontales est $= (abc \ldots r, \overline{\alpha\beta\gamma \ldots \rho})$. Mais puisqu'on a supposé $(bc \ldots r, \overline{\beta\gamma \ldots \rho}) = \overline{(bc \ldots r}, \beta\gamma \ldots \rho)$; $(bc \ldots r, \overline{\alpha\gamma \ldots \rho}) = \overline{bc \ldots r}, \alpha\gamma \ldots \rho)$, etc., chacune des n séries verticales est nécessairement $= \overline{(abc \ldots r}, \alpha\beta\gamma \ldots \rho)$. De là on conclut

$$n \times (abc \ldots r, \overline{\alpha\beta\gamma \ldots \rho}) = n \times \overline{(abc \ldots r}, \alpha\beta\gamma \ldots \rho)$$

ou bien

$$(abc\,..\,r, \overline{\alpha\beta\gamma\,..\,\rho}) = \overline{(abc\,..\,r, \alpha\beta\gamma\,..\,\rho)}.$$

Or, on a évidemment $(ab, \overline{\alpha\beta}) = a^\alpha b^\beta - a^\beta b^\alpha = a^\alpha b^\beta - b^\alpha a^\beta = (\overline{ab}, \alpha\beta)$. Le théorème est donc complètement démontré.

Je supprimerai dans la suite le tiret.

Note. Cette démonstration quoiqu'assez simple semble reposer cependant sur un artifice de calcul; mais en cherchant une démonstration *directe*, j'ai rencontré une difficulté d'un genre particulier. En effet, on trouve facilement que le $\overset{me}{l\ldots}$, terme de l'une des fonctions en question, est aussi égal ou au même terme de l'autre, ou généralement au $\overset{me}{m\ldots}$, et que, dans le dernier cas, le $\overset{me}{m\ldots}$ terme de la première, est aussi égal au $\overset{me}{l\ldots}$ de la seconde, abstraction faite des signes. Mais l'identité de ces derniers (qui est de rigueur), exige des explications très-longues et beaucoup moins élémentaires que la démonstration que je viens de donner.

Coroll. Si l'on substitue dans $(abc..r, \alpha\beta\gamma..\rho)$, au lieu de $\alpha, \beta,.. \rho$, la $\overset{me}{\mu\ldots}$ permutation des exposans, l'expression qui en provient sera $= \dot{\mu} \times (ab..r, \alpha\beta..\rho)$. (*v.* I.)

Si l'on y substitue au lieu de $a, b.. r$, la $\overset{me}{m\ldots}$ permutation des bases, $(ab\,..\,r, \alpha\beta\,..\,\rho)$ sera changée en $\dot{m} \times (ab..r, \alpha\beta..\rho)$.

Enfin, si l'on y substitue simultanément, au lieu de $\alpha, \beta,.. \rho$ et de $a, b,.. r$, respectivement la $\overset{me}{\mu\ldots}$ et la $\overset{me}{m\ldots}$ permutation, la nouvelle expression sera $= \dot{m} \times \dot{\mu} \times (ab..r, \alpha\beta..\rho)$.

Théorème III. Soient les échelles

$$\begin{pmatrix} abc..\,a^k a^{k+1}..\,r \\ 123..\,k, k+1..\,n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} \alpha\beta\gamma..\alpha^k\,\alpha^{k+1}..\,\rho \\ 123..k, k+1..n \end{pmatrix};$$

faisons avec les élémens de l'une ou de l'autre, toutes les combinaisons sans répétition de la classe k, et substituons-les suc-

cessivement dans le premier facteur du produit

$$(ab..a^k, \alpha\beta..\alpha^k) \,.\, (a^{k+1}..r, \alpha^{k+1}..\rho)$$

au lieu de $a, b.. a^k$, quand on a fait les combinaisons des bases; et, au lieu de $\alpha, \beta, .. \alpha^k$, quand on a fait celles des exposans. Cela fait, remplaçons dans l'autre facteur les élémens $a^{k+1}... r$ (ou $\alpha^{k+1}...\rho$), par tous ceux qui ne se trouvent pas dans le premier, en ayant soin de les écrire dans l'ordre indiqué par les échelles. Donnons le signe (+) au premier produit, et déterminons celui de chaque autre d'après (II). La somme algébrique de ces produits, sera dans l'un et l'autre cas $=$ $(ab..r, \alpha\beta..\rho)$.

Ce théorème n'est qu'un développement du premier, et se démontre très-facilement au moyen du second corollaire.

Théorème IV. Si $a^\alpha = b^\alpha$; $a^\beta = b^\beta$; $a^\gamma = b^\gamma$; etc., je dirai que les bases a et b sont *identiques*. Les exposans α et β le seront, si $a^\alpha = a^\beta$; $b^\alpha = b^\beta$; $c^\alpha = c^\beta$; etc.

Si deux élémens soit des bases, soit des exposans, sont identiques, on aura

$$(abc...r, \alpha\beta\gamma...\rho) = 0.$$

Cette propriété suit immédiatement du théorème précédent, en y mettant $k = 2$.

IV.

Ces théorèmes servent de base à plusieurs questions intéressantes. La forme de $(ab...r, \alpha\beta..\rho)$ suppose, comme on a vu, un nombre égal de bases et d'exposans; mais le théorème IV nous met à même d'envisager tous les autres cas. Un des plus simples est celui où $\nu = 2n$, ou $n = 2\nu$. On aura alors les échelles.

$$\begin{pmatrix} ab..a^n, & a, & b\;..a^n \\ 12..n, & n+1, & n+2..2n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} \alpha\,\beta \cdots \rho \\ 1\,2\,...\,2n \end{pmatrix}$$

ou

$$\begin{pmatrix} ab..r \\ 12...2\nu \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} \alpha\beta..\alpha^\nu, \alpha, & \beta & ..\alpha^\nu \\ 12..\nu, \nu+1, \nu+2..2\nu \end{pmatrix}$$

Pour fixer les idées, je ne parlerai que de la première supposition ($\nu = 2n$), en remarquant que ce qui va être dit, porte également sur l'autre.

Ainsi donc, si nous développons la fonction

$$(ab..a^n ab..a^n, \alpha\beta..\rho) = o$$

d'après le théorème III, en y remplaçant n par $2n$ et k par n, nous trouverons une expression, dont les termes sont égaux deux à deux, savoir le premier facteur de l'un au second facteur de l'autre, et le premier de celui-ci au second du premier terme. Or, ces deux termes (*v*, II.), seront de même signe ou de signe contraire selon que n est pair ou impair. Dans le dernier cas, le développement ne sert qu'à vérifier le théorème IV; mais dans le premier, il nous conduit à une nouvelle équation qui, par une circonstance assez curieuse, n'en a pas moins lieu pour un nombre impair de bases.

Remarquons qu'aucun des termes du développement n'est séparément $= o$, et qu'il y en a autant qu'il y a de combinaisons de la classe n de $2n$ élémens; nombre qui est égal à $\dfrac{2n(2n-1)\ldots(n+1)}{n.(n-1)\ldots\quad 1}$, c'est-à-dire, au double des combinaisons de la classe $(n-1)$ de $2n-1$ élémens, c'est-à-dire, encore au double des combinaisons qui commencent par le premier élément d'entre celles de la classe n de $2n$ élémens. Cette remarque faite, je passe au théorème suivant.

Théorème V. Soient les échelles

$$\begin{pmatrix} ab..r, & a, & b & ..r \\ 12..n, n+1, n+1..2n \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} \alpha\beta\gamma..\alpha^n, & \alpha^{n+1}..\rho \\ 123..n, & n+1..2n \end{pmatrix}$$

qu'on fasse avec les élémens $\beta, \gamma..\rho$, toutes les combinaisons de

la classe $(n-1)$, et qu'on les substitue successivement dans le premier facteur du produit

$$(ab..r,\, \alpha\beta\gamma..\alpha^n).\ (ab..r,\, \alpha^{n+1}...\rho),$$

au lieu de $\beta\gamma..\alpha^n$; qu'on remplace maintenant dans l'autre facteur les exposans $\alpha^{n+1}...\rho$ par tous ceux qui ne se trouvent pas dans le premier, en ayant soin de les écrire suivant l'ordre indiqué par les échelles. Si l'on donne au premier produit le signe $(+)$, et qu'on détermine les signes de tous les autres d'après (II), la somme algébrique en sera $=o$, *que le nombre* n, *soit pair ou impair*.

Si n est pair, cette propriété se trouve déjà suffisamment éclaircie; il ne serait donc nécessaire de la vérifier que pour un nombre impair de bases; cependant la démonstration suivante convient également aux deux cas.

Remarquons d'abord que, suivant le théorème I, on pourra isoler la base a dans les deux facteurs de chaque terme de l'équation en question. Ce développement fait, on devra multiplier l'un par l'autre les facteurs de chaque terme *primitif*, ce qui donnera des termes *du développement* de la forme

$$\begin{array}{lll} +\ a^{\alpha}\ a^{\alpha^{n+1}} & (b..r,\beta..\alpha^n) . (b..r,\alpha^{n+2}..\rho), ... \\ \pm\ a^{\Lambda}\ a^{\mathrm{M}} & (b..r,\alpha...) . (b..r, ...), ... \end{array}$$

Λ et M désignant des exposans quelconques. Or, entre tous ces termes il y en aura un certain nombre qui ont le même coefficient $\left(a^{\alpha}\ a^{\alpha^{n+1}},...\ a^{\Lambda}\ a^{\mathrm{M}},...\right)$, et qu'on pourra par conséquent grouper ensemble. Si donc notre théorème est vrai, tous ces groupes doivent être séparément $=o$.

Remarquons encore que tous les termes primitifs qui contiennent Λ et M dans le même facteur, ne sauraient fournir des termes au groupe qui a le coefficient $a^{\Lambda}\ a^{\mathrm{M}}$, et que tous les autres termes (qui contiennent Λ dans l'un et M dans l'autre des facteurs), possèdent un terme du développement (et jamais

plus) qui ait le coefficient a^{Λ} a^{M}. Quant aux signes de ces termes, ils dépendent évidemment du signe du terme primitif d'où ils sont tirés, et de la place de A et M dans les facteurs respectifs. Désignons donc généralement la place de A, dans le premier ou dans le second facteur d'un terme primitif quelconque, (soit T) par (AT), de sorte que A soit précédé dans le même facteur de (AT) — 1 exposans.

Soit maintenant l'échelle des exposans

$$\begin{pmatrix} \alpha\beta \,..\; '\Lambda,\; \Lambda,\; \Lambda' \,..M..\; \rho \\ 12 \,..\; \lambda-1, \lambda, \lambda+1 ..\mu ..\; 2n \end{pmatrix};$$

occupons-nous en premier lieu des groupes qui ont un coefficient de la forme a^{α} a^{Λ}. Les termes primitifs qui y fournissent des termes, contiennent nécessairement A dans le second facteur. Si T et T' sont deux de ces termes primitifs, contenant dans le *premier* facteur, l'un 'A, et l'autre A' (*v. l'échelle*), tandis que les autres exposans y sont les mêmes, les signes de T et T' seront identiques (*v.* II), et l'on aura (AT') = (AT) + 1; par conséquent, les termes du développement tirés de T et T', seront de signe contraire (*v. Théor.* I, *Coroll.* 1).

Si maintenant T et T' désignent deux termes primitifs qui ont A dans le second facteur, et qui ont du reste dans le premier (n — 1) exposans communs, tandis que les deux élémens isolés se suivent immédiatement dans l'échelle, les termes T et T' seront de signe contraire, et les élémens isolés se trouveront dans l'échelle tous les deux, ou à gauche ou à droite de A. La place de A sera donc la même dans T et T', et les termes du développement qui en sont tirés, seront de signe contraire.

Faisons abstraction du coefficient commun a^{α} a^{Λ}, et concevons les termes du groupe rangés suivant l'ordre des termes primitifs; ils se composeront par conséquent chacun de deux facteurs de la forme

$$(b..r, \beta...).\ (b..r,...),$$

et il est évident qu'on aura successivement dans leurs premiers

facteurs, toutes les combinaisons de la classe $(n-1)$ des élémens $\beta, \gamma \ldots {}'\Lambda\Lambda' \ldots \rho$ (dont le nombre est $= 2n - 2$). Or, on voit clairement, en faisant attention à la détermination des signes, que le groupe entier n'est autre chose que le développement de la fonction

$$a^{\alpha}\ a^{\Lambda}\ (b \ldots rb \ldots r,\ \beta\gamma \ldots {}'\Lambda\Lambda' \ldots \rho)$$

partant il est $= o$.

Envisageons maintenant les groupes qui ont un coefficient de la forme $a^{\Lambda}\ a^{\mathrm{M}}$. Soient T et T', deux termes primitifs qui contiennent l'un Λ dans son premier facteur, et M dans le second, l'autre M dans le premier et Λ dans le second de ses facteurs; supposons du reste que les autres exposans du premier facteur de T, soient les mêmes que ceux du premier facteur de T'; ainsi donc, abstraction faite de Λ et M, les exposans du second facteur de T seront aussi les mêmes que ceux du second facteur de T'. Il suit de là, que les termes fournis par T et T' au groupe $a^{\Lambda}\ a^{\mathrm{M}}\ (\ldots)$ sont égaux entre eux, au signe près. Pour déterminer ce dernier, nommons s le signe de T; nous trouverons donc (*v. II*, *et l'échelle précéd.*), le signe de $\mathrm{T}' = s.(-1)^{\mu-\lambda}$. Or, nous trouverons sans difficulté (en supposant $\mu > \lambda$) $(\Lambda \mathrm{T}') = \lambda - (\Lambda \mathrm{T}) + 1$, et $(\mathrm{MT}') = \mu - (\mathrm{MT})$. Le signe du terme tiré de T, sera donc $= s.(-1)^{(\Lambda\mathrm{T})+1+(\mathrm{MT})+1} = s.(-1)^{(\Lambda\mathrm{T})+(\mathrm{MT})}$ (*v. le Théorème I, Corollaire I*), et celui du terme tiré de $\mathrm{T}' = s.(-1)^{\mu-\lambda}.(-1)^{(\Lambda\mathrm{T}')+(\mathrm{MT}')} = s.(-1)^{2\mu+1-(\Lambda\mathrm{T})-(\mathrm{MT})}$; d'où il résulte que les deux termes en question sont de signe contraire.

Nous en concluons enfin, que les termes du groupe $a^{\Lambda}\ a^{\mathrm{M}}(\ldots)$ sont, deux à deux, égaux entre eux et de signe contraire; partant tous les groupes qui ont un coefficient de la forme $a^{\Lambda}\ a^{\mathrm{M}}$ sont séparément $= o$; ce qui était nécessaire pour compléter la démonstration de notre théorème.

On voit aisément que dans le cas que le nombre des bases serait le double de celui des exposans, on devrait faire les combinaisons de la classe $(n-1)$ de $b \ldots a^n\ a^{n+1} \ldots r$ et les substi-

tuer au lieu de $b \ldots a^n$, dans le produit

$$(ab \ldots a^n, \alpha\beta \ldots \rho) \quad (a^{n+1} \ldots r, \alpha\beta \ldots \rho),$$

et que, cette transformation faite, la propriété que nous venons de démontrer a également lieu pour cette dernière supposition.

Exemples. Soient les échelles

$$\begin{pmatrix} abab \\ 1234 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} \alpha\beta\gamma\delta \\ 1234 \end{pmatrix}; \text{ on trouvera}$$

$$o = (ab, \alpha\beta)(ab, \gamma\delta) - (ab, \alpha\gamma)(ab, \beta\delta) + (ab, \alpha\delta)(ab, \beta\gamma).$$

Soient les échelles

$$\begin{pmatrix} abcd \\ 1234 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} \alpha\beta\,\alpha\beta \\ 1234 \end{pmatrix}; \text{ il viendra}$$

$$o = (ab, \alpha\beta)(cd, \alpha\beta) - (ac, \alpha\beta)(bd, \alpha\beta) + (ad, \alpha\beta)(bc, \alpha\beta).$$

Si $n=3$, $\nu=6$, le nombre des termes sera $= \frac{1}{2} \cdot \frac{6.5.4}{1.2.3} = 10$; si $n=4$, $\nu=8$, ce nombre sera $= \frac{1}{2} \cdot \frac{8.7.6.5}{1.2.3.4} = 35$; si $n=5$, $\nu=10$, nous le trouverons $= \frac{1}{2} \cdot \frac{10.9.8.7.6}{1.2.3.4.5} = 126$, etc.

Coroll. Ce théorème nous conduit à une relation qui existe dans le cas le plus général, savoir si $\nu - n$ est un nombre quelconque ou positif ou négatif. Supposons $\nu > n$, et $\nu - n = \mathrm{N}$; soient les échelles

$$\begin{pmatrix} ab \ldots r, & a, & b \ldots r, & \mathrm{A}, & \mathrm{B} \ldots \mathrm{R} \\ 12 \ldots \mathrm{N}, & \mathrm{N}+1, & \mathrm{N}+2 \ldots 2\mathrm{N}, & 2\mathrm{N}+1, & 2\mathrm{N}+2 \ldots \nu \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{pmatrix} \alpha\beta \ldots \alpha^{\mathrm{N}}, \alpha^{\mathrm{N}+1} \ldots \rho & \mathrm{A}, & \mathrm{B}, & \ldots \mathrm{P} \\ 12 \ldots \mathrm{N}, \mathrm{N}+1 \ldots 2\mathrm{N}, & 2\mathrm{N}+1, & 2\mathrm{N}+2 \ldots \mathrm{V} \end{pmatrix}.$$

Qu'on fasse avec les élémens $\beta, \gamma, \ldots \alpha^{\mathrm{N}}, \alpha^{\mathrm{N}+1} \ldots \rho$ toutes les combinaisons de la classe $(\mathrm{N}-1)$; qu'on les substitue successivement au lieu de $\beta \ldots \alpha^{\mathrm{N}}$ dans le premier facteur du produit

$$(ab\,..\,r\mathrm{AB}\,..\,\mathrm{R},\alpha\beta\,..\,\alpha^{\mathrm{N}}\,\mathrm{AB}\,..\,\mathrm{P})\times$$
$$(ab\,..\,r\mathrm{AB}\,..\,\mathrm{R},\alpha^{\mathrm{N}+1}\,..\,\rho\mathrm{AB}\,..\,\mathrm{P});$$

qu'on remplace dans l'autre facteur les exposans $\alpha^{\mathrm{N}+1}\,..\,\rho$, par tous ceux qui ne se trouvent pas dans le premier ; qu'on détermine enfin le signe de chaque produit d'après (II); la somme algébrique en sera $= o$.

En effet supposons les échelles

$$\left(\begin{matrix} ab..r, & \mathrm{A}, & \mathrm{B} & ...\mathrm{R}, & a, & b & ...r, & \mathrm{A} & \mathrm{B}, .. & \mathrm{R} \\ 12..\mathrm{N}, & \mathrm{N}+1, & \mathrm{N}+2, & ...\nu-\mathrm{N}, & \nu-\mathrm{N}+1, & \nu-\mathrm{N}+2 & ..\nu, & \nu+1, & \nu+2 .. & 2\nu-2\mathrm{N}\end{matrix}\right)$$

et

$$\left(\begin{matrix} \alpha\beta..\alpha^{\mathrm{N}}, & \alpha^{\mathrm{N}+1}..\,\rho, & \mathrm{A}, & \mathrm{B}, & ...\mathrm{A}^{\nu-3\mathrm{N}}, & \mathrm{A}^{\nu-3\mathrm{N}+1}...\mathrm{P}, & \mathrm{A}\,.. & \mathrm{P} \\ 12..\mathrm{N}, & \mathrm{N}+1..2\mathrm{N}, & 2\mathrm{N}+1, & 2\mathrm{N}+2, & ...\nu-\mathrm{N}, & \nu-\mathrm{N}+1...\nu, & \nu+1\,.. & 2\nu-2\mathrm{N}\end{matrix}\right)$$

Formons avec ces élémens la fonction décrite dans le dernier théorème; la somme tótale en sera donc $= o$, et le premier terme aura la forme

$$(ab\,..\,r\,\mathrm{AB}\,..\,\mathrm{R},\alpha\beta\,..\,\rho\;\mathrm{A}\,..\,\mathrm{A}^{\nu-3\mathrm{N}})\times$$
$$(ab\,..\,r\,\mathrm{AB}\,..\,\mathrm{R},\mathrm{A}^{\nu-3\mathrm{N}+1}\,...\,\mathrm{PA}\,..\,\mathrm{P}).$$

Or, on voit facilement que tous les termes qui ne contiennent pas dans chaque facteur *tous* les exposans A,B.. P, s'évanouiront séparément, parce qu'il y aura des exposans identiques dans l'un ou l'autre des facteurs. Il ne restera donc que les termes qui, contenant α dans le premier facteur, y épuisent successivement toutes les combinaisons de la classe $(\mathrm{N}-1)$ des élémens $\beta,\gamma\,..\,\rho$. Mais les signes de ces termes sont évidemment déterminés comme ils devaient l'être; partant la somme algébrique de tous les termes est $= o$, ce qu'il fallait démontrer.

Les propriétés que j'ai exposées jusqu'à présent, m'ont encore conduit à plusieurs autres. Je me réserve d'en faire la communication dans un autre article, où j'espère aussi prouver leur utilité par plusieurs applications. Au reste, je dois encore re-

marquer que la recherche de ces fonctions, n'est pas tout-à-fait nouvelle. C'est *Lagrange* qui le premier a établi des relations entre les coordonnées de *trois* points (1). Il a traité au surplus des relations des fonctions (*ab*, 12), (*ab*, 13), (*ab*, 23), etc., avec d'autres fonctions symétriques des neuf coordonnées. Plusieurs de ses formules se trouvent comprises dans les équations générales établies dans cet article.

De la division en parties égales d'une droite donnée sur le terrain, en n'employant, pour cet effet, que des jalons et une fausse équerre; par J. N. Noël, Principal de l'Athénée de Luxembourg.

La manière très-simple dont M. *De Bher*, au commencement du tom. IV de la *Correspondance*, a résolu le problème où il s'agit de diviser en deux parties égales un angle donné sur le terrain, en n'employant qu'une fausse équerre et des jalons, conduit naturellement à chercher si, avec ces instrumens et sans mesurer aucune ligne, on pourrait aussi résoudre les problèmes que voici :

1° Par un point donné, mener une parallèle à une droite donnée;

2° D'un point donné sur une droite, élever une perpendiculaire à cette droite;

3° D'un point donné hors d'une droite, abaisser une perpendiculaire à cette droite;

4° Sur un côté donné, décrire un carré;

5° Sur une corde donnée, décrire une circonférence;

---

(1) *Mémoires de l'Académie de Berlin*, 1773.

6° Trouver le centre d'un arc donné et mener une tangente, à cet arc par un point donné ;

7° Inscrire un carré, un hexagone régulier et un triangle équilatéral dans un cercle donné ;

8° Enfin, diviser une droite donnée en autant de parties égales qu'on voudra.

Tous ces problèmes sont effectivement possibles sur le terrain (et probablement d'autres encore), avec une fausse équerre et des jalons seuls ; mais nous ne voulons ici considérer que le dernier.

Soit donc AB la droite proposée à diviser, par exemple, en 5 parties égales, sans mesurer aucune ligne. Pour cela, on fera d'abord les angles BAC, BAD, ABC et ABD, égaux chacun à l'angle a de la fausse équerre ; on marquera, par des jalons, les points C et D, ainsi que l'intersection O de AB et CD. Faisant de même l'angle $\mathrm{AOH}=a$, puis l'angle $\mathrm{A}pl=a$, l'angle $\mathrm{A}q\mathrm{N}=a$, et plaçant après chaque fois des jalons aux intersections avec AD et AO, on aura successivement

$$\mathrm{AO}=\frac{1}{2}\mathrm{AB},\ \mathrm{A}p=\frac{1}{3}\mathrm{AB},\ \mathrm{A}q=\frac{1}{4}\mathrm{AB} \text{ et } \mathrm{A}r=\frac{1}{5}\mathrm{AB}.$$

Cherchant de la même manière, le quart de rB, puis le tiers de la ligne restante et la moitié de la dernière ligne qui restera, on aura successivement les quatre points où AB est divisée en 5 parties égales.

Il est clair que si Aq était la $(n-1)^{me}$ partie de AB, Ar en serait la n^{me}. Mais cette manière de diviser la droite AB en n parties égales, bien que fort intéressante comme exercice en théorie, ne peut guère être utile dans la pratique, parce qu'elle demande beaucoup trop d'opérations à exécuter sur le terrain. Effectivement, pour avoir les $n-1$ points où AB est divisée en n parties égales, il faudrait placer n^2-1 jalons et prendre $\frac{1}{2}n(n+1)+1$ angles égaux à l'angle a de la fausse équerre ; ce qui fait en tout $\frac{1}{2}n(3n+1)$ opérations.

La division de AB en parties égales serait beaucoup plus simple, si l'angle de la fausse équerre était les deux tiers d'un angle droit. La solution serait alors analogue à celle du problème que voici : *Avec une seule ouverture de compas, trouver la* n^{me} *partie d'une droite AB, tracée sur le papier.* (*Fig.* 9, *pl.* IV.)

Sur le côté donné $AB=c$, on construira le triangle équilatéral ABC; on prendra, sur le prolongement de CB, n parties égales à c; puis du point B et des points de division B_1, B_2, $B_3, \ldots, B_n$, comme centres, et avec un rayon égal à c, on décrira, sur CB_n, des demi-circonférences, qui se couperont deux à deux aux points A_1, A_2, $A_3, \ldots, A_n$; alors, 1° les droites CA_1, CA_2, CA_3, $CA_4, \ldots, CA_n$, couperont le côté AB et donneront successivement la moitié, le tiers, le quart, le 5e, ..., le n^{me} de ce côté; 2° les mêmes droites couperont la hauteur AD du triangle ABC, et donneront successivement le tiers, le 5e, le 7e, le 9e, ..., le $(2n+1)^{me}$ de cette hauteur; 3° les carrés des mêmes droites vaudront successivement $3c^2$, $7c^2$, $13c^2$, $21c^2, \ldots,$ $[n(n+1)+1]c^2$; 4° le rayon du cercle inscrit dans le triangle curviligne $B_1A_1A_2$, vaudra $\frac{1}{4}c$; 5° le rayon du cercle inscrit dans la figure formée par la droite BB_1 et les deux arcs BA_1, A_1B_1, vaudra $\frac{3}{8}c$; 6° enfin, l'aire de la figure terminée par CB_n et les arcs CAA_1, A_1A_2, $A_2A_3, \ldots, A_nB_n$, aura pour mesure $\frac{1}{6}(n+1)\pi c^2+\frac{1}{4}(n-1)c^2\sqrt{3}.$

Pour démontrer 3°, désignons par d_n la droite CA_n, et ainsi des autres : comme dans le parallélogramme $CAA_\nu B_{\nu-1}$, le côté $CB_{\nu-1}=\nu c$, et la diagonale $AB_{\nu-1}=CA_{\nu-1}=d_{\nu-1}$, il est visible qu'on aura

$$(d_\nu)^2+(d_{\nu-1})^2=2c^2(\nu^2+1).$$

Résolvant, par substitution de valeurs, cette équation à indices, et observant que $d_0=CA=c$, on trouvera les valeurs énoncées 3°.

La suite de ces valeurs conduit au problème que voici : *Dans*

la série des nombres impairs, excepté 1, *on supprime successivement* 1, 2, 3, 4, 5,..., *termes, à partir du second, en conservant un terme après chaque suppression; quelle est la somme des* n *premiers termes de la série restante* 3, 7, 13, 21, 31, 43, 57, *etc.?*

On trouvera, pour la valeur de cette somme,

$$\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)+n.$$

Luxembourg, le 25 avril 1829.

Trouver sur le plan d'un quadrilatère simple quelconque, le point dont les distances aux sommets de ce quadrilatère, multipliées par les deux côtés respectivement opposés, soient égales entre elles, par M. Manderlier, professeur de mathématiques à l'Athénée de Namur (1). (*Fig.* 10, *pl.* IV.)

Si l'on prolonge les côtés opposés d'un quadrilatère simple quelconque ABCD, jusqu'en F et G, on aura le quadrilatère complet ABFCGDA : aux triangles ABG et ADF, circonscrivons deux cercles qui se coupent en P. En supposant fixe la droite ADG, faisons tourner ABF autour du point A, les points B et F étant toujours respectivement situés sur les circonférences APG et ADP; en vertu du mouvement de AF, les droites DF et GB, tourneront autour des points fixes G et D; soit AB'F' une seconde position de ABF, et C' l'intersection des nouvelles droites DF' et B'G; comme les angles ABF, AB'G sont égaux entre eux aussi bien que AFD et AF'D, il s'en suit que les angles en C et C', sont aussi égaux entre eux, et que par conséquent, les points C, C', etc., sont situés sur une circonférence passant par D et G. Lorsque AF deviendra AP, les points B,

---

(1) Ce problème a déjà été résolu, pour un cas particulier, à la page 354 du volume précédent de la *Correspondance*. A. Q.

F et C, se confondront avec le point P, et on en conclura que les quatre points G, D, C et P, sont sur une même circonférence. On ferait voir de la même manière que les quatre points B, F, C et P, sont également situés sur une même circonférence; on pourra donc énoncer ce théorème : *Si on circonscrit quatre cercles aux quatre triangles formés par un quadrilatère complet, ces quatre cercles se couperont en un point unique P.*

Il suit de cette proposition que, si l'on mène les axes radicaux AP, BP, CP, DP, les triangles APB et CPD seront semblables ainsi que les triangles APD et BPC; on aura donc:

$$AB : CD = BP : CP = AP : DP.$$
$$AD : BC = DP : CP = AP : BP.$$

d'où l'on tire

$$PA \times BC \times CD = PB \times CD \times DA = PC \times DA \times AB = PD \times AB \times BC.$$

En menant les axes radicaux PF, PG, on aurait également, pour les deux autres quadrilatères simples BFDG et AFCG,

$$PD \times FB \times BG = PG \times BF \times FD = PB \times FD \times DG = PF \times DG \times GB$$

et

$$PC \times GA \times AF = PG \times AF \times FC = PA \times FC \times CG = PF \times AG \times GC.$$

Le problème proposé *Correspondance mathématique*, t. IV, page 348, est donc susceptible d'être résolu généralement; il ne s'agit en effet pour cela que de prolonger les côtés opposés du quadrilatère et de circonscrire deux cercles aux triangles ainsi formés; le point d'intersection de ces deux cercles sera le point cherché.

Dans les parallélogrammes, le point P sera intérieur et déterminé par l'intersection des diagonales : dans le quadrilatère inscriptible, il y aura deux solutions, et enfin, dans le trapèze, le point P sera extérieur et déterminé par l'intersection des deux côtés non parallèles.

Namur, le 15 avril 1829.

Résumé d'une série d'expériences relatives à la durée de la sensation de la lumière, par M. Plateau (1).

Première section. 1° Une sensation quelconque exige un temps appréciable pour se former complétement, de même que pour disparaître complétement.

2° Les sensations ne disparaissent pas brusquement, mais diminuent graduellement d'intensité.

3° Lorsqu'une sensation s'efface, la marche de son décroissement est d'autant moins rapide que la sensation est plus près de sa fin.

4° Les différentes couleurs éclairées par la simple lumière du jour, procurent des sensations qui diffèrent très-peu quant à leur durée totale. Sous ce rapport, les couleurs paraissent devoir être rangées dans l'ordre suivant, en commençant par celle qui produit la sensation la plus durable :

Blanc, *jaune*, *rouge*, *bleu*.

5° Cette durée totale, comptée depuis l'instant où la sensation a acquis toute sa force, jusqu'à celui où elle n'est plus qu'à peine sensible, est à peu près de 0″,34 terme moyen.

6° Enfin, il résulte accidentellement de mes expériences que les couleurs principales doivent être aussi rangées, relativement à l'intensité de leurs sensations, dans l'ordre :

Blanc, *jaune*, *rouge*, *bleu*,

en commençant par celle qui produit l'impression la plus énergique.

---

(1) M. *Plateau* a eu l'obligeance d'extraire les résultats que nous présentons ici, d'un Mémoire très-intéressant, qu'il se propose de publier sous peu à l'occasion de sa promotion au grade de docteur en sciences, à l'Université de Liége. Voyez encore les pages 51 et 393 de la *Correspondance*, tome IV.

Deuxième section. 1° De nouvelles preuves confirment le dernier des résultats précédens, savoir que, sous le rapport de l'énergie de leurs sensations, les couleurs doivent être rangées dans l'ordre suivant, en commençant par celle qui a le plus d'action :

Blanc, *jaune*, *rouge*, *bleu*.

2° Les angles visuels sous lesquels mon œil cesse d'apercevoir ces différentes couleurs, sont les suivans :

	A l'ombre.	Au soleil.
Blanc.	18″	12″
Jaune.	19″	13″
Rouge	31″	23″
Bleu.	42″	26″

les angles observés au soleil étant à peu près les deux tiers des angles correspondans observés à l'ombre.

3° Lorsque les sensations de deux couleurs différentes se succèdent alternativement sur la rétine, avec une vitesse insuffisante pour qu'il en résulte une sensation unique, il se manifeste généralement de vives nuances étrangères aux deux couleurs employées et à leur mélange; on peut même par ce moyen produire un beau blanc, et cela en ne se servant que de jaune et de bleu.

4° Lorsque deux sensations se succèdent alternativement avec assez de rapidité pour qu'elles paraissent n'en former qu'une seule, cette dernière n'offre pas toujours la même couleur que le mélange matériel des deux couleurs employées : ainsi, en combinant de cette manière et dans certaines proportions, l'impression du jaune avec celle du bleu foncé, on produit une couleur parfaitement grise, sans la moindre nuance de vert.

5° Les sensations de certaines couleurs (peut-être n'y a-t-il d'exception que pour le jaune), n'agissent pas, dans leur combinaison avec d'autres sensations, en raison de l'intensité de

ces couleurs ; leur *maximum* d'influence réside dans une certaine teinte pâle, en deçà et au delà de laquelle cette influence diminue : ainsi la teinte bleue qui possède ce *maximum* à l'égard du rouge et du jaune, est celle du ciel dans ses parties les plus colorées.

Liége, le 24 avril 1829.

Au rédacteur de la Correspondance Mathématique et Physique.

Je viens de lire un excellent Mémoire de M. *Gergonne*, inséré dans le n° 9 du tom. XIX des *Annales de Mathématiques*. Cet estimable savant y donne les équations différentielles du mouvement d'une molécule lumineuse à travers un milieu diaphane quelconque dont la *densité optique* varie d'un point à un autre suivant une loi quelconque. M'étant assuré que l'on peut parvenir très-simplement aux mêmes équations en partant de la relation

$$v'^2 - v^2 = 4k^2 (u' - u)$$

donnée par l'auteur au commencement de son Mémoire ; je pense que les lecteurs de la *Correspondance* qui auront lu le travail de M. *Gergonne*, verront avec plaisir un moyen de parvenir très-facilement aux équations différentielles du mouvement de la molécule lumineuse.

La lettre k représente une constante ; v la vitesse de la molécule lumineuse dans le milieu dont la densité est u, et v' la vitesse de la même molécule après qu'elle est entrée dans le milieu dont la densité est u'. Cette relation subsiste quelle que soit la surface de séparation des deux milieux, et quelle que soit la position de la trajectoire de la molécule lumineuse par rapport à cette surface. Cela posé, sup-

posons que la molécule traverse un milieu dont la densité, en chaque point, soit une fonction u des trois coordonnées x, y, z, de ce point. En dénotant par v la vitesse de la lumière dans ce point, par ds l'élément de sa trajectoire, et par dt l'élément du temps supposé constant; on aura visiblement

$$v' = v + \frac{dv}{dt}dt, \quad u' = u + \frac{du}{ds}vdt,$$

en observant que $ds = vdt$.

En substituant ces valeurs de v' et de u' dans la première équation, on aura, après réduction,

$$\frac{dv}{dt} = 2k^2\frac{du}{ds},$$

ou bien

$$\frac{d^2s}{dt^2} = 2k^2\frac{du}{ds}.$$

Cette dernière équation peut facilement se décomposer en trois autres en y substituant pour ds^2 sa valeur $dx^2+dy^2+dz^2$, après l'avoir mise sous cette forme

$$\frac{1}{2}d.\frac{ds^2}{dt^2} = 2k^2\frac{du}{ds}ds.$$

On aura d'abord

$$dx\frac{d^2x}{dt^2} + dy\frac{d^2y}{dt^2} + dz\frac{d^2z}{dt^2} = 2k^2\frac{du}{ds}ds;$$

d'un autre côté il est clair que

$$\frac{du}{ds}ds = \frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy + \frac{du}{dz}dz;$$

d'où il résulte évidemment

$$\frac{d^2x}{dt^2}=2k^2\frac{du}{dx},\quad \frac{d^2y}{dt^2}=2k^2\frac{du}{dy},\quad \frac{d^2z}{dt^2}=2k^2\frac{du}{dz},$$

conformément aux résultats de M. *Gergonne*.

Louvain, le 1er mai 1829. M. PAGANI.

Observations de l'aiguille magnétique, à Bruxelles, par A. QUETELET.

Les deux principaux instrumens dont je me suis servi dans mes observations ont été construits par le célèbre *Troughton*. Celui que j'ai employé pour déterminer la déclinaison de l'aiguille, a la forme d'un théodolite; la lunette destinée à la détermination du méridien, peut servir en même temps de microscope. Le cercle azimutal est divisé avec une extrême précision de dix en dix minutes et le vernier permet de lire distinctement de dix en dix secondes. Les lectures se font au moyen de trois verniers également distans. L'aiguille qui a 20 centimètres de longueur peut être retournée et observée sur ses deux faces. Les observations suivantes ont été faites dans le jardin de l'Observatoire qu'on construit actuellement à Bruxelles.

DATE.	HEURE.	DÉCLINAISON.	TEMPÉRATURE.
1828 22 octobre. .	1 heure.	22° 28′ 51″,1	14° Réaum.
» 22 novembre .	2 »	22° 28′ 38″,7	12
» 24 » . .	2 »	22° 28 40	6,5
1829 6 mai . . .	1 »	22° 28 55	16

Je m'étais occupé de l'observation des variations diurnes

de l'aiguille aimantée, pendant le mois de septembre dernier, dans une campagne que j'occupais alors près de Bruxelles, dans le voisinage de la porte de Namur, et à l'endroit nommé l'*Arbre Bénit*. Voici les résultats obtenus le 26 septembre; je n'ai point fait la réduction au méridien que je n'avais pas déterminé avec le soin nécessaire.

7 h. du mat.	39°	31′	43″,3	14°,2 R.	1 h.	39°	39′	46″,6	17° R.
9 —	»	36	30	14,8	2 —	»	38	13,3	19,2
10 —	»	39	33,3	16,2	3 —	»	39	3,3	22,4
11 —	»	41	40	16,3	4 —	»	38	40	21,7
12 —	»	42	53,3	»	5 —	»	39	20	20,8
12,40′ —	»	43	8,3	16,5	6 —	»	36	13,3	19,2

On voit que le *maximum* de déviation a eu lieu vers 12 h. 40′, et la variation depuis 7 heures du matin s'élevait à 11′ 25″; les autres jours, j'ai trouvé la variation un peu moins forte entre les deux mêmes heures : elle ne s'élevait que de 8 à 9 minutes.

L'inclinaison de l'aiguille a été observée avec un excellent instrument de *Troughton*, que je me réserve de faire connaître ailleurs. Je me bornerai à dire ici que l'instrument comporte toute les vérifications désirables; le limbe du cercle vertical est divisé de 15 en 15 minutes.

1828	fin de septembre. .	68° 56′,6	incl. de l'aiguille.
»	22 octobre. . . .	68° 55,7	
»	5 novembre . . .	68° 56,45	
1829	5 mai	68° 56,4	

La première valeur est le résultat d'un grand nombre d'observations faites, à l'*Arbre Bénit*, pendant la dernière dixaine de septembre; les autres observations ont été faites dans le jardin de l'Observatoire. Toutes ont eu lieu dans le

plan du méridien, et chacune est le résultat de seize lectures différentes, faites de la manière suivante : le limbe gradué étant tourné vers l'ouest, je faisais deux lectures aux deux extrémités de l'aiguille ; l'instrument ayant fait alors une demi-révolution sur lui-même, je faisais deux nouvelles lectures ; je retournais ensuite l'aiguille sur ses axes, ce qui donnait lieu à quatre lectures analogues aux précédentes. Enfin, après le renversement des pôles de l'aiguille, je reprenais huit lectures dans l'ordre que je viens d'indiquer.

J'eus le bonhenr de posséder à Bruxelles, pendant les premiers jours de novembre dernier, M. le capitaine *Sabine* qui revenait d'Altona. Ce savant me fit l'amitié de prendre part à mes observations, et voulut bien déterminer l'intensité magnétique avec les aiguilles qui lui avaient servi dans ses voyages. Voici les résultats qu'il a obtenus le 5 novembre dernier, en même temps que ceux qu'il avait déterminés à Londres le 18 août, et à Altona le 21 septembre de la même année :

	AIGUILLE IV.	TEMPÉR. FAHR.
Bruxelles. . . .	349″,39 pour 100 osc.	44°
Londres	354,07	65
Altona	353,03	62
	AIGUILLE XI.	
Bruxelles. . . .	308,76	43°,1
Londres	313,37	65
Altona	313,02	64
	AIGUILLE X.	
Bruxelles. . . .	342,495	43,8
Londres	346,60	65
Altona	346,00	62

Note sur le mouvement vibratoire d'une membrane élastique de forme circulaire; lue à l'Académie Royale des sciences de Bruxelles, le 1[er] mai 1829, par M. PAGANI.

Une membrane élastique de forme circulaire, étant fixée par son contour, est également tendue en tous sens. Qu'on lui donne une forme quelconque qui l'écarte très-peu de son plan, et que l'on imprime une vitesse initiale arbitraire à tous ses points; il en résultera un mouvement vibratoire qui dépendra de la forme primitive de la membrane et de la vitesse initiale de ses divers points.

L'objet de cette Note est de déterminer le mouvement normal de la membrane, c'est-à-dire les vibrations qui s'exécutent dans le sens de la normale au plan de la membrane en équilibre, quelles que soient d'ailleurs les fonctions arbitraires qui expriment les ordonnées et les vitesses initiales de tous ses points.

Après un temps quelconque t, écoulé depuis l'origine du mouvement, rapportons chaque point de la membrane aux coordonnées z, r, θ, dont la première est perpendiculaire au plan du cercle formé par la membrane en équilibre, la seconde étant la distance du pied de cette perpendiculaire au centre de la membrane, distance qui fait un angle θ avec un diamètre fixe. Le problème qu'il faut résoudre se réduit à intégrer l'équation

$$(1) \qquad \frac{d^2z}{dt^2} = c^2\left(\frac{d^2z}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dz}{dr} + \frac{1}{r^2}\frac{d^2z}{d\theta^2}\right),$$

en soumettant l'intégrale aux conditions

$$(2) \qquad z = o \qquad \text{pour} \qquad r = a = \text{rayon de la membrane},$$

$$\left.\begin{array}{l} z = \varphi(r, \theta) \\ \dfrac{dz}{dt} = \psi(r, \theta) \end{array}\right\} \text{pour} \quad t = o$$

φ et ψ dénotant des fonctions arbitraires données.

La valeur de z qui doit satisfaire aux équations proposées est une fonction des trois variables indépendantes r, θ, et t, que nous pouvons désigner par $\Pi(r, \theta, t)$; et la difficulté consiste à déterminer la forme de Π. Voici le moyen d'y parvenir : par la nature de la question, la fonction $\Pi(r, \theta + 2i\pi, t)$ étant indentique avec elle-même, quel que soit le nombre entier i, depuis zéro jusqu'à l'infini, π désignant le rapport de la circonférence au diamètre; on pourra prendre, d'après un théorème remarquable de M. *Fourier*,

$$(4) \qquad \Pi(r, \theta, t) = \frac{1}{2}\zeta_0 + \zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3 + \text{etc. à l'infini};$$

et le terme général de cette série sera

$$(5) \quad \zeta_i = \frac{1}{\pi}\left[\cos. i\theta \int_0^{2\pi} \Pi(r,\alpha,t)\cos. i\alpha. d\alpha + \sin. i\theta \int_0^{2\pi} \Pi(r,\alpha,t)\sin. i\alpha. d\alpha\right].$$

En substituant la série (4) à la place de z dans l'équation (1), et en observant que l'on a $\frac{d^2\zeta_i}{d\theta^2} = -i^2\zeta_i$, on obtiendra une série d'équations différentielles dont le type genéral est

$$\frac{d^2\zeta_i}{dt^2} = c^2\left(\frac{d^2\zeta_i}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\zeta_i}{dr} - \frac{i^2\zeta_i}{r^2}\right).$$

On satisfait à cette équation en prenant

$$(6) \qquad \zeta_i = (A \cos. c\mu t + B \sin. c\mu t)\, u,$$

les lettres A et B dénotent des fonctions inconnues de θ, la lettre μ représente une constante indéterminée, et la lettre u une fonction de r, déterminée par l'équation

$$(7) \qquad \left(\frac{i^2}{r} - \mu^2 r\right) u = \frac{du}{dr} + r\frac{d^2u}{dr^2}.$$

L'intégrale complète de cette équation a été donnée par M. *Poisson*, dans le XIXe cahier du *Journal de l'École Polytechnique*; mais en négligeant le terme qui devient infini pour $r = o$, et qui ne peut convenir à la question que nous traitons, on aura simplement

$$(8) \qquad u = r^i f(\mu r),$$

en posant, pour abréger,

$$(9) \qquad f(\mu r) = \int_o^\pi \cos.(\mu r \cos.\omega) \sin.^{2i}\omega.\, d\omega.$$

On ne peut satisfaire à la condition (2) qu'en faisant $u = o$, pour $r = a$, ce qui conduit à l'équation transcendante

$$(10) \qquad o = \int_o^\pi \cos.(a\mu \cos.\omega) \sin.^{2i}\omega.d\omega,$$

qui nous donnera une infinité de valeurs réelles pour l'indéterminée μ.

Si nous substituons successivement dans la formule (6) toutes les valeurs de μ, dont les carrés diffèrent entre eux, nous pourrons prendre pour ζ_i la somme des résultats et l'exprimer de cette manière;

$$(11) \qquad \zeta_i = r^i \Sigma\,(A_\mu \cos.c\mu t + B_\mu \sin.c\mu t) f(\mu r),$$

le signe Σ devant s'étendre à toutes les racines positives de l'équation (10), et les coefficiens A_μ, B_μ pouvant être regardés comme des fonctions indéterminées de la racine μ.

La fonction ζ^i sera complétement déterminée lorsqu'on connaîtra la forme des fonctions A_μ et B_μ; et pour y parvenir il faut comparer les équations (5) et (11), lorsque la variable t est égale à zéro. On trouve d'abord, en ayant égard à la

première des équations (3),

$$(12)\, r^i \Sigma A_\mu f(\mu r) = \frac{1}{\pi}\left[\cos. i\theta \int_o^{2\pi} \varphi(r,\alpha) \cos. i\alpha . d\alpha + \sin. i\theta \int_o^{2\pi} \varphi(r,\alpha) \sin. i\alpha . d\alpha\right].$$

En différentiant les équations (5) et (11) par rapport à t, en faisant ensuite $t = o$, on aura en comparant les résultats, et en vertu de la seconde équation (3),

$$(13)\, r^i \Sigma \mu B_\mu f(\mu r) = \frac{1}{\pi}\left[\cos. i\theta \int_o^{2\pi} \psi(r,\alpha) \cos. i\alpha . d\alpha + \sin. i\theta \int_o^{2\pi} \psi(r,\alpha) \sin. i\alpha . d\alpha\right]$$

Tout étant connu dans les seconds membres de ces dernières équations, il faudra que les coefficiens indéterminés des séries qui forment leurs premiers membres soient tels que chaque équation subsiste dans toute l'étendue des valeurs de r.

Pour cela, prenons $u' = r^i f(\mu' r)$, μ' étant une racine de l'équation (10), dont le carré diffère de μ. En multipliant les deux membres de l'équation (7) par $u'dr$ et en intégrant par parties, on parviendra sans peine, ainsi que je l'ai déjà montré en plusieurs occasions, aux résultats suivans

$$\int_o^a uu' r dr = o, \qquad \int_o^a u^2 r dr = \frac{a}{2\mu} \frac{du}{dr} \frac{du}{d\mu};$$

ayant soin de faire $r = a$ dans le second membre de cette dernière équation.

Mais la fonction u est telle que l'on a $\mu \dfrac{du}{d\mu} = r \dfrac{du}{dr}$ pour la valeur particulière $r = a$, puisque $f(a\mu) = o$; par conséquent on aura

$$\int_o^a u^2 r dr = \frac{1}{2}[a^{i+1} f'(a\mu)]^2,$$

si par f' on dénote la fonction prime dérivée de f.

Cela posé, il est facile de voir qu'en multipliant chaque membre des équations (12) et (13) par $r^{i+1} f(\mu r) dr$, et en intégrant ensuite entre les limites o et a, on doit avoir

$$(14) \quad \begin{cases} A_\mu = \dfrac{M}{P}, \\ B_\mu = \dfrac{N}{c\mu P}, \end{cases}$$

en posant, pour abréger,

$$(15) \quad \begin{cases} M = \cos. i\theta \int_o^a f(\mu r) r^{i+1} dr \int_o^{2\pi} \varphi(r.\alpha) \cos. i\alpha . d\alpha \\ \quad + \sin. i\theta \int_o^a f(\mu r) r^{i+1} dr \int_o^{2\pi} \varphi(r,\alpha) \sin. i\alpha . d\alpha \\ N = \cos. i\theta \int_o^a f(\mu r) r^{i+1} dr \int_o^{2\pi} \psi(r,\alpha) \cos. i\alpha . d\alpha \\ \quad + \sin. i\theta \int_o^a f(\mu r) r^{i+1} dr \int_o^{2\pi} \psi(r,\alpha) \sin. i\alpha . d\alpha . \\ P = \dfrac{\pi}{2} \left[a^{i+1} f'(a\mu) \right]^2 \end{cases}$$

En rapprochant les formules (4), (11), (9), (10), (14), et (15), l'intégrale complète de l'équation (1) combinée avec les équations particulières (2) et (3), sera représentée par la formule

$$(16) \qquad z = \frac{1}{2} \zeta_o + \mathop{S}_{i=1}^{i=\infty} \zeta_i .$$

Dans un autre article nous appliquerons cette solution générale à quelques cas particuliers.

Sur les courbes du troisième et du quatrième degré. (Extrait d'une lettre de M. Chasles, au rédacteur.)

... Ce que vous me marquez sur les courbes du troisième

degré m'a fait grand plaisir et me sera utile ; car j'ignorais que toute courbe du troisième degré pût toujours être la projection de l'intersection de deux surfaces du second degré. Je savais cependant que la projection et plus généralement la perspective de la courbe d'intersection de deux surfaces du second degré peut n'être que du troisième degré ; mais j'ignorais que réciproquement toute courbe du troisième degré peut être considérée comme la projection de l'intersection de deux surfaces du second degré, ce que vous démontrez si simplement de deux manières.

En m'occupant de la courbe d'intersection de deux surfaces du second degré, j'avais d'abord pensé que sa projection sur un plan pouvait représenter toutes les courbes planes des troisième et quatrième degrés, parce qu'elle contient dix-huit coefficiens des deux surfaces, et que l'équation la plus générale des courbes du quatrième degré ne contient que quatorze coefficiens; mais j'ai cru ensuite le contraire en ce qui concerne les courbes du quatrième degré. Voici pourquoi : j'ai démontré (sauf erreur que votre lettre me fait craindre), que toute courbe du quatrième degré qui provient de la projection de l'intersection de deux surfaces du second degré, admet, au plus, *huit* tangentes passant par un même point.

Mais je vois dans le *Traité de calcul différentiel* de M. *Lacroix*, une courbe du quatrième degré ayant pour équation $y^4 - 96.a^2y^2 + 100.a^2x^2 - x^4 = o$, à laquelle on peut mener 10 tangentes parallèles à l'axe des y : car il existe six tangentes distinctes et quatre d'entre elles ont deux points de contact, et par conséquent comptent chacun pour deux. Cette courbe ne peut donc pas être la projection de l'intersection de deux surfaces du deuxième degré ; ou bien le théorème que je crois avoir démontré est faux.

Cependant la discussion de ce théorème me conduit à ces trois autres résultats qui sont exacts, savoir :

1° Quand la projection de l'intersection de deux surfaces du second degré est seulement du troisième degré, on peut

mener généralement, et au plan, *six* tangentes à cette courbe par un même point ;

2° Ce nombre des tangentes peut être réduit à quatre ;

3° Il peut être réduit à trois ; c'est ce qui a lieu pour les paraboles cubiques. ($y = ax^3 + bx^2 + ex + d$).

Je démontre directement et rigoureusement ces deux dernières propositions de différentes manières, géométriques et analitiques ; quant à la première elle est évidente à l'inspection de la plupart des courbes comprises dans l'équation générale $xy^2 + ey = ax^3 + bx^2 + ex + d$, et qui se trouvent décrites dans l'*Énumération* de *Newton* et dans deux mémoires de *Nicole* (Acad. des sciences de Paris, 1729 et 1731).

J'ai trouvé une description géométrique de trois séries de courbes du troisième degré qui admettent six, quatre ou trois tangentes.

Je serais fâché que mon théorème principal ne fût pas vrai, car un autre travail en souffrirait aussi. Il est facile de s'abuser sur un sujet aussi épineux, qui n'a point encore été traité. J'ai déjà commis une erreur que je n'ai pas tardé à reconnaître. Je croyais avoir démontré que le nombre des tangentes menées par un point à une courbe du troisième degré ne pouvait s'élever au delà de quatre ; mais mon calcul ne s'appliquait qu'à une classe particulière de ces courbes.

Je me suis occupé aussi de la courbe à *double courbure* du troisième degré. Sa projection sur un plan n'admet que quatre ou trois tangentes. Elle jouit de plusieurs propriétés remarquables. Par exemple : elle est le lieu géométrique des sommets de tous les cônes du second degré qu'on peut faire passer par six points donnés ; elle est l'arête de rebroussement d'une développable du quatrième degré ; cette développable est l'enveloppe des plans de toutes les coniques qui sont tangentes à six plans fixes donnés.

Chartres, le 27 avril 1829.

Note du rédacteur sur la lettre précédente.

J'ai cru utile de reproduire ici les observations intéressantes que M. *Chasles* a bien voulu m'adresser sur un passage de ma lettre, insérée dans le dernier cahier de la *Correspondance Mathématique*, parce qu'elles renferment des choses nouvelles et qu'elles me fournissent l'occasion de revenir sur une proposition que j'avais avancée. J'avais réussi à prouver que toute courbe du troisième degré peut être considérée comme la projection de l'intersection de deux surfaces du second; et j'étais parvenu à un résultat semblable pour toutes les courbes du quatrième degré que j'avais soumises à la même épreuve. J'avais alors établi le calcul d'une manière générale; mais, faute d'avoir eu égard à des équations de conditions difficiles à saisir au milieu d'une analise compliquée, j'ai pu avoir été conduit à des conséquences inexactes. Je me suis aperçu déjà qu'une inadvertance a influé sur les réductions dont j'ai cru susceptibles les équations de la page 195; du reste, cette inexactitude porte moins sur le fond que sur la forme. J'ignore si mes résultats sur les équations du quatrième degré sont fautifs, car je n'ai pu encore trouver le loisir nécessaire pour refaire mes calculs; je me trouve cependant rassuré en partie par la lettre suivante, que M. *Chasles* m'a fait l'honneur de m'adresser depuis. Dans tous les cas, je m'applaudirai d'avoir provoqué une discussion intéressante pour la science, dans laquelle on aura pu apprécier la modestie de M. *Chasles* et son talent pour les recherches géométriques.

Monsieur,

Dans la dernière lettre que j'ai eu l'honneur de vous écrire, j'ai exprimé quelque doute sur l'identité de l'équation générale des courbes planes du quatrième degré, avec l'équation des courbes du même degré, qui proviennent de la projection de l'intersection de deux surfaces du second degré. Mais je manifestais en même temps la crainte et le pressentiment d'une erreur dans ma démonstration. Et, en effet, en revenant sur

ce sujet, j'ai reconnu qu'elle n'était pas générale, de sorte que mon objection n'est pas fondée; mais de plus, j'ai tout lieu de croire que toute courbe du quatrième degré peut être la projection de l'intersection de deux surfaces du second degré, car j'ai trouvé de nombreuses analogies entre ces courbes. Par exemple, elles sont susceptibles du même nombre de tangentes issues d'un même point: ce nombre varie entre trois et douze; elles sont susceptibles aussi des mêmes affections, telles que points conjugués, doubles, triples, de rebroussement, etc.

Je vous aurais fait part sur-le-champ de mon retour à votre opinion, si je n'avais désiré, pour me faire pardonner mon erreur, vous adresser en même temps tout le travail que j'ai fait sur les courbes des troisième et quatrième degrés (1).

J'ai eu l'honneur de vous dire que les courbes du troisième degré admettent six, quatre ou trois tangentes passant par un même point; ce qui divise ces courbes en trois classes principales.

La première classe comprend les courbes produites par l'ombre de la parabole divergente à ovale, et de la parabole divergente *pure* ou *campaniforme ;*

La deuxième classe comprend les courbes produites par l'ombre de la parabole divergente à point conjugué, et de la parabole divergente à nœud;

La troisième classe comprend les courbes produites par l'ombre de la parabole divergente à point de rebroussement.

J'ai classé ainsi toutes les courbes de l'*Énumération* de *Newton.*

La parabole campaniforme donne lieu à une remarque relative à la théorie des courbes, qui, je crois, n'a pas encore été faite. Les six tangentes issues d'un même point qu'admettent les courbes produites par l'ombre de la parabole campaniforme, peuvent être toutes six réelles; mais il peut arriver aussi que

(1) Nous espérons pouvoir insérer dans un prochain numéro les recherches de M. *Chasles* sur les équations des troisième et quatrième degrés, en même temps que celles qui nous ont été adressées par MM. *Van Rees* et *Le François.* Il est à désirer qu'on commence à s'occuper de ces sortes de lignes. A. Q.

deux d'entre elles soient toujours imaginaires, quel que soit le point par lequel on mène les tangentes à la courbe. Il s'ensuit que la polaire de cette courbe est du sixième degré, mais qu'une droite menée arbitrairement dans son plan ne la coupe jamais en plus de quatre point *réels*, les deux autres points sont toujours imaginaires. Ainsi une courbe du sixième degré peut n'être jamais coupée en plus de quatre points réels par une droite.

Les points d'inflexion des courbes du troisième degré, dont *Newton* ne s'est pas occupé, mériteraient une étude particulière.

Toute courbe du troisième degré a un ou trois points d'inflexion; un de ces points ou tous les trois peuvent être à l'infini;

Si, par un point d'inflexion, on tire arbitrairement une transversale, et qu'aux deux points où elle rencontre la courbe, on mène les tangentes, leur point de concours aura pour lieu géométrique une droite;

Cette droite fixe rencontre la transversale en un point qui est le conjugué harmonique du point d'inflexion par rapport aux deux points où la transversale rencontre la courbe;

Cette même droite rencontre la courbe en trois points qui sont les points de contact de la courbe, et de ses trois tangentes issues du point d'inflexion.

Comme ce point d'inflexion est commun à trois autres tangentes infiniment voisines, il résulte de là qu'on peut généralement mener à une courbe du 3e degré six tangentes par un même point; ce qui offre une démonstration de la classification énoncée plus haut.

Les trois points d'inflexion sont toujours en ligne droite; ce qui n'est guère observé dans les figures de l'*Énumération*, non plus que cette autre propriété des courbes du troisième degré; les points où les trois asymptotes rencontrent cette courbe sont tous trois en ligne droite, etc., etc.

J'ai essayé de classer les courbes du quatrième degré, comme celles du troisième, par rapport au nombre de tangentes qu'on peut leur mener par un même point; mais mon travail est trop imparfait pour que j'ose vous en entretenir. M. Chasles.

Paris, le 29 mai 1829.

Solution d'un problème énoncé à la page 136 de ce volume, et résolu par M. Heichen, candidat en sciences à l'Université de Louvain.

1° Le problème proposé par M. *Noël* dans le numéro II, revient évidemment à trouver sur le plan et dans l'intérieur d'un triangle donné un point, tel que la somme de ses distances aux trois sommets du triangle soit un *minimum*. Or, soit ABC le triangle proposé (*fig.* 11, *pl.* IV), faisons :

$AB = a$, $AC = b$, $BC = c$,
$Bo = x$, $Ao = y$, $Co = z$;
$OD = v$, $CD = u$,
$CE = e$, $AE = h$, $COD = \varphi$, $BOD = \theta$, $EAO = \mu$; $CAB = \alpha$.

La figure donne les égalités :

$$z^2 = u^2 + v^2,\quad x^2 = v^2 + (u-c)^2,\quad y^2 = (e-u)^2 + (h-v)^2$$

de là résulte :

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{dz}{du} = \dfrac{u}{z},\ \dfrac{dz}{dv} = \dfrac{v}{z},\ \dfrac{dx}{du} = -\dfrac{c-u}{x},\ \dfrac{dx}{dv} = \dfrac{v}{x}, \\ \dfrac{dy}{du} = -\dfrac{e-u}{y},\ \dfrac{dy}{dv} = -\dfrac{h-v}{y} \end{array}\right\}\ \ldots (1)$$

En faisant, pour abréger, $x + y + z = P$, on aura d'après ces égalités :

$$(1)\ldots \frac{dP}{du} = -\frac{c-u}{x} - \frac{e-u}{y} + \frac{u}{z} = -\sin.\theta - \sin.\mu + \sin.\varphi = o$$

$$(2)\ldots \frac{dP}{dv} = \frac{v}{x} + \frac{v}{z} - \frac{h-v}{y} = \cos.\theta - \cos.\mu + \cos.\varphi = o.$$

Ces deux dernières équations nous donnent :

$$\sin.\varphi - \sin.\theta = \sin.\mu;\ \cos.\varphi + \cos.\theta = \cos.\mu.$$

Ajoutant ces expressions, et les soustrayant l'une de l'autre, on obtiendra :

$$1 - 2\sin.\varphi\sin.\theta + 2\cos.\varphi\cos.\theta = o, \quad \text{d'où} \quad \cos.(\varphi+\theta) = -\frac{1}{2};$$

ainsi : $\varphi + \theta = COD + BOD = 120°$.

On trouverait de même que l'angle AOC, ou BOA $= 120°$; le *minimum* demandé répond donc au point O, pour lequel les trois angles COB, AOB, COA sont chacun égaux à 120°. Pour trouver ce point par une construction géométrique, il faudra décrire sur les côtés BC, AC, deux segmens capables chacun de l'angle (120°), et le point d'intersection des arcs de cercle qui en résultent donnera le point O cherché. Si l'on voulait avoir l'expression du *minimum* dont il s'agit, il faudrait observer que $\cos.120° = -\frac{1}{2}$ $\sin.(120°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, et dénotant par m la surface du triangle proposé, on trouverait :

$$a^2 = x^2 + y^2 + xy;\quad b^2 = z^2 + y^2 + zy;\quad c^2 = x^2 + z^2 + zx;$$
$$xy + yz + xz = \frac{2m}{\sin.60}.$$

Cette dernière expression étant multipliée par 3, et ajoutée aux trois autres, il viendra :

$$P = \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{2} + \frac{3m}{\sin.60°}} = \sqrt{a^2+b^2-2ab\cos.(\alpha+60°)}.$$

Louvain, le 2 mai 1829.

Marine du Royaume des Pays-Bas.

Par arrêté du 15 mai 1828, S. M. a nommé une commission,

présidée par le vice-amiral Buyskes, chargée de l'examen des points les plus importans concernant la marine, son organisation et tout ce qui, dans ses résultats, s'y rattache nécessairement.

L'état de la force navale en activité de service au 1er janvier 1829 est présenté de la manière suivante :

Escadre de la Méditerranée.

Frégates *la Sambre*,	44	canons,	317	hom.	d'équip.
» *la Kenau Hasselaar*,	32	»	264	»	»
» *le Javanais*,	32	»	212	»	»
Corvettes *le Dolphïn*,	28	»	158	»	»
» bombre. *la Méduse*,	20	»	158	»	»
» » *l'Hécla*,	20	»	157	»	»
Bricks *l'Écho*,	18	»	106	»	»
» *la Huppe*,	18	»	106	»	»
Avisos *le Vautour*,	8	»	55	»	»
» *le Chien Courant*,	8	»	54	»	»
Transports *la Mouette*,	6	»	34	»	»
» *Dordrecht*,	10	»	56	»	»
Totaux : 12 bâtimens,	244	canons,	1677	hom.	d'équip.

Escadre aux Indes Orientales.

Frégate *la Bellone*,	44	canons,	317	hom.	d'équip.
Corvettes *le Triton*,	28	»	158	»	»
» *l'Atalante*,	28	»	158	»	»
» *la Lys*,	28	»	158	»	»
» *la Nehalennia*,	28	»	158	»	»
» *la Comète*,	28	»	158	»	»
Totaux : 6 bâtimens,	184	canons,	1107	hom.	d'équip.

Navires aux Indes Occidentales.

La corvette *Pallas*.	20	canons,	127	hom. d'équip.
Bricks *la Panthère*,	18	»	106	» »
» *le Faucon*,	18	»	106	» »
» *le Courrier*,	18	»	106	» »
Totaux : 4 bâtimens,	74	canons,	445	hom. d'équip.

Navigation pour la correspondance.

Brick paquebot *l'Hirondelle*,	8	canons,	46	hom. d'équip.
Bateaux à vapeur *le Curaçao*,	6	»	54	» »
» » *Surinam*,	8	»	68	» »
Totaux : 3 bâtimens,	22	canons,	168	hom. d'équip.

Croisière.

La frégate *Sumatra*,	44	canons,	317	hom. d'équip.

Bâtimens stationnaires.

Vaisseau de ligne *la Zélande*,	68	canons,	200	hom. d'équip.
Frégates *l'Amstel*,	44	»	200	» »
» *Minerve*,	32	»	200	» »
Aviso *le Pélican*,	8	»	»	» »
Totaux : 4 bâtimens,	152	canons,	600	hom. d'équip.

Total de la force navale en activité de service.

Un vaisseau de ligne, 7 frégates, 9 corvettes, 6 bricks, 3 avisos, 2 transports et 2 bateaux à vapeur, en tout trente bâtimens portant 720 canons et 4314 hommes d'équipage.

L'irrégularité apparente des équipages résulte de ce que, conformément aux ordres du roi, on place à bord, lors du départ des navires, un certain nombre de mousses pour en former par la suite des matelots nationaux.

Force navale en non activité de service au 1er janvier 1829.

6 Vaisseaux de ligne, savoir : le *Zélandais* et le *Neptune* de 84; la *Hollande*, le *Waterloo*, le *Kortenaer* et le *Jupiter* de 74.
13 Frégates, savoir : le *Waal* de 60; le *Rhin*, l'*Escaut*, le *Rupel*, *Diane*, la *Meuse*, *Rotterdam*, *Alger*, *Palembang*, *Jason*, *Cérès*, le *Zaan*, toutes de 44, et l'*Euridice* de 32.
8 Corvettes, savoir : l'*Amphitrite* de 32; *Pollux*, *Hipponène*, l'*Héroïne*, *Argo*, *Ajax*, *Borée*, toutes de 28, et *Proserpine* de 20.
5 Bricks, savoir : la *Sirène*, *Pégase*, la *Sirène* de 18; le *Poisson volant* de 14, et le *Lévrier* de 8. En outre, 1 schoner, 14 canonnières à corne de vergue, et 16 canonnières à rames; en tout : 63 bâtimens, indépendamment du *Zoutman* de 80, et du *Guillaume Ier* de 74, qui ne sont plus en état de tenir la mer et qui sont destinés à être démolis, ainsi que de la frégate *Marie Reigersbergen* de 32 et de la corvette l'*Union* de 20, qui ne peuvent plus être employées que comme vaisseaux stationnaires.

Le nombre des bâtimens soit en activité, soit en non activité de service, sans y comprendre ceux qui doivent être démolis, est maintenant de 7 vaisseaux de ligne, 20 frégates, 17 corvettes, 10 bricks, plus un brick paquebot et 36 autres bâtimens, outre deux bateaux à vapeur; total 93 vaisseaux.

La force à laquelle le gouvernement se propose de porter la marine pendant la seconde période décennale, se composera de 2 vaisseaux de 84, de 10 de 74, en tout 12 vaisseaux de ligne; de 6 frégates de 60, 24 de 44, en tout 30 frégates; de 36 corvettes et bricks de 18 à 32; d'un bâtiment d'exercice; de 8 avisos; de 3 paquebots à vapeur; de 3 vaisseaux de transport; de 5 schoners; de 14 canonnières à corne de vergue et de 14 canonnières à rames. Outre ces bâtimens il y aura au delà du complet 3 frégates de 32 et 2 canonnières à rames. Ainsi la force navale du royaume, se composera pendant la prochaine période décennale de 131 bâtimens dont 12 vaisseaux de ligne, 33 frégates, 36 cor-

vettes, bombardières et bricks et 50 autres bâtimens. En comparant l'état actuel avec l'état futur de notre marine, on voit que non-seulement elle aura 38 vaisseaux de plus, mais encore que la force des bâtimens sera considérablement augmentée.

Les bâtimens à construire pendant la prochaine période décennale consistent en 6 vaisseaux de 74, 4 frégates de 60, 10 de 44, 7 corvettes de 28, 3 bricks de 18, un bâtiment d'exercice, 3 avisos, 1 paquebot à vapeur, 1 transport et 4 schoners; en tout 40 bâtimens à construire; cependant le gouvernement aurait encore besoin de matériaux pour la construction de 58 canonnières à corne de vergue et de 34 canonnières à rames, mais il a cru lors de la rédaction du second budjet décennal, qu'il serait plus à propos d'attendre pour ce qui concerne les canonnières et la construction des navires dits schoners, le rapport de la commission présidée par le vice-amiral Buyskes, d'autant plus qu'en cas de besoin on pourrait y pourvoir promptement. (Extrait de la *Gazette Officielle*.)

Notice historique sur le commandeur de Nieuport (1).

Charles-François le Prud'homme d'Hailly, vicomte de *Nieuport*, issu d'une ancienne famille de la Flandre, naquit à Paris, le 13 janvier 1746, pendant que la maison de ses parens, à Gand, était occupée militairement par le maréchal de Saxe.

Reçu dès le berceau dans l'Ordre de Malte, il fut élevé au collége de Louis-le-Grand où il fit de brillantes études. Au sortir du collége, il passa au service d'Autriche, sous le règne de Marie-Thérèse, et fut nommé lieutenant au corps du génie.

---

(1) Voyez les biographies et un éloge inséré par M. le Prince *de Gavre* dans les *Mémoires de l'Académie Royale de Bruxelles*, tom. IV.

Quelque temps après, il obtint un congé, et alla faire ses caravanes à Malte. Ayant été chargé, à l'âge de quarante ans, des affaires de son ordre près de la cour des Pays-Bas, il rentra dans sa patrie; et, décidé à s'y fixer, il échangea une commanderie qu'il avait obtenue dans la Brie, contre celle de Vaillampont, près de Nivelles.

Ici commence véritablement sa carrière scientifique. Il s'était peu occupé de sciences depuis sa jeunesse, comme il le disait souvent lui-même, et ce n'est guère que vers l'âge de quarante ans qu'il se mit à reprendre sérieusement l'étude des mathématiques.

En France, il avait été en relation avec plusieurs savans illustres et entre autres avec *D'Alembert*, *Bossut* et *Condorcet;* à Bruxelles, l'Académie royale des sciences et des lettres qui venait d'être instituée par Marie-Thérèse, s'empressa de le recevoir au nombre de ses membres; et elle a reçu de lui une série de recherches intéressantes sur différens points des sciences mathématiques, qu'elle à insérées successivement dans le Recueil de ses Mémoires (1).

La révolution française ne tarda pas à éclater; et les commanderies furent supprimées : M. *De Nieuport* perdit la sienne, sans en obtenir aucune indemnité. Il supporta avec fermeté cette perte qui le laissait sans fortune, et chercha dans l'étude et le silence de la retraite, un noble soulagement à ses revers. Il avait présenté depuis plusieurs années à l'Académie Royale

---

(1) Voici les mémoires insérés par M. *De Nieuport* dans le Recueil de l'ancienne Académie de Bruxelles.

Tom. II. Essai analitique sur la mécanique des voûtes. 90 pages.

Mémoire sur les courbes que décrit un corps qui s'approche ou s'éloigne en raison donnée d'un point qui parcourt une ligne droite. 11 pages.

Sur la manière de trouver le facteur qui rendra une équation différentielle complète, etc. 4 pages.

Tom. IV. Mémoire sur les codéveloppées des courbes, avec quelques réflexions sur la méthode ordinaire d'élimination. 16 pages.

Mémoire sur la propriété prétendue des voûtes en chaînettes, etc. 16 pages.

des sciences de Paris, deux mémoires d'analise; mais las des retards continuels qu'avait éprouvés leur impression, il était revenu sur cette matière. Une foule de vérités nouvelles se présentèrent à lui, et il résolut de refondre ses deux mémoires en un seul qu'il publia sous ce titre : *Recherches sur l'intégration des équations aux différences partielles qui admettent une intégration de l'ordre immédiatement inférieur.* Ce mémoire, qui est le fruit de profondes et pénibles recherches, fait partie du Recueil qui parut en 1794 sous le titre : *Mélanges mathématiques, ou Mémoires sur différens sujets de mathématiques tant pures qu'appliquées* (1). Je n'entreprendrai pas de donner une analise des travaux intéressans que renferme ce Recueil, parce que l'auteur l'a fait lui-même dans un *avant-propos*, écrit avec la clarté qui caractérise généralement ses autres ouvrages.

Dans le second Recueil des *Mélanges* qui parut en 1799 (2), M. *De Nieuport* revint encore sur l'intégration des équations aux différences partielles. Ce sujet dont il s'est toujours occupé avec une espèce de prédilection, s'y trouve traité de manière à lui mériter l'estime et la reconnaissance des savans. « L'importance et la difficulté du sujet, dit-il, justifieront assez la constance avec laquelle je me suis livré à ces recherches arides en apparence, mais en effet bien attrayantes pour l'analiste qui, ne se bornant pas à employer l'algèbre comme un moyen prompt de solution, se plaît encore à éclairer sa marche ténébreuse et à observer la souplesse admirable avec laquelle elle sait se frayer une route à travers les obstacles les plus multipliés. »

On trouve encore dans les *Mélanges* quelques mémoires sur des questions de mécanique, et des solutions de plusieurs problèmes de géométrie qui, peut-être, méritaient moins de figurer à côté des écrits précédens.

L'empire, en succédant à la république, n'apporta aucun

---

(1) A Bruxelles, chez M. Le Maire, in-4o.
(2) A Bruxelles, chez M. Le Maire, in-4o.

changement dans la fortune du commandeur; mais, comme il l'avouait lui-même, à cause du refus qu'il fit constamment d'accepter les faveurs qui lui étaient offertes. Les seules qui pussent flatter son amour-propre et ne point alarmer sa noble fierté, étaient celles qui lui étaient décernées par ses pairs, et qui étaient la récompense de ses travaux scientifiques. L'Institut de France, dès son organisation, avait appelé M. *De Nieuport* au nombre de ses membres correspondans. Notre compatriote paya son tribut par deux mémoires : l'un *sur l'équation générale des polygones réguliers*, l'autre *sur un problème présenté par D'Alembert.*

En 1802, parut le Mémoire *sur l'intégrabilité médiate des équations différentielles, d'un ordre quelconque, et entre un nombre quelconque de variables*, pour faire suite aux *Mélanges mathématiques* (1). L'auteur entend par intégrabilité *médiate*, l'aptitude à devenir une différentielle exacte au moyen d'un facteur. L'idée de cet ouvrage lui a été suggérée par des recherches de *P. Franchini, sur l'intégration des équations différentielles*. Le Mémoire porte cette épigraphe touchante

Has mihi nemo invidit opes; hæc una supersunt,
Et jam vergenti sat erunt solatia vitæ.

L'*Essai sur la théorie du raisonnement* parut en 1805. L'auteur n'avait eu d'abord en vue que d'examiner jusqu'à quel point on pourrait appliquer aux sciences en général, la méthode géométrique et d'ajouter quelques notes sur ce sujet à la *logique* de Condillac; mais en donnant successivement du développement à ses idées, il finit par former un travail complet « mon seul guide a été cette précieuse habitude de réfléchir, qu'on contracte par l'étude des sciences exactes. On jugera, par le peu de livres que je cite (et je cite tous ceux que je connaissais), combien j'étais étranger à cette matière. » L'étude de la philo-

---

(1) A Bruxelles, chez M. Le Maire.

sophie lui fit sentir le besoin d'approfondir les anciens; et à l'âge de 60 ans, il se remit à apprendre la langue grecque avec la même ardeur qu'il avait repris les mathématiques à l'âge de quarante. Platon devint son livre de prédilection et presque son unique étude.

Lors de l'érection du royaume des Pays-Bas, en 1815, M. *De Nieuport* fut appelé à la seconde chambre des États-Généraux; il rentra en même temps à l'Académie royale de Bruxelles qui venait d'être réorganisée (1); et fut nommé successivement membre de l'Institut des Pays-Bas (2), de l'Académie royale de

---

(1) Les *Nouveaux Mémoires* de l'Académie contiennent les écrits suivans que M. *De Nieuport* y a insérés :

Tome I. Mémoire contenant l'esquisse d'une méthode inverse des formules intégrales définies. 36 pages.

Mémoire sur une propriété générale des ellipses et des hyperboles semblables. 28 pages.

Mémoire sur l'équilibre des corps qui se balancent librement sur un fil flexible, et sur celui des corps flottans. 22 pages.

Mémoire sur un cas de la théorie des probabilités au jeu. 14 pages.

In Platonis opera et Ficinianam interpretationem animadversiones. 30 pages.

Mémoire contenant quelques réflexions sur des notions fondamentales en géométrie. 20 pages.

Tome II. Mémoire sur la pression qu'un même corps exerce sur plusieurs appuis à la fois. 44 pages.

Mémoire sur la métaphysique du principe de la différentiation. 58 pages.

Tome III. Mémoire sur une question relative au calcul des probabilités. 11 pages.

Ce mémoire qui même n'est point terminé, est le dernier ouvrage de M. *De Nieuport*. La continuation en est due à M. *Dandelin*. A la fin du mémoire se trouvent ces quatre vers latins :

Hic me luctantem frustra octogesimus annus
Occupat, hic artem, invitus, pennamque repono.
Nunc onus excipiant quibus est integra juventus;
Me jubet hic ætas studiis imponere finem.

(2) Le recueil de l'Institut des Pays-Bas contient un mémoire de M. *De Nieuport*, sur la mesure des arcs elliptiques, qui a été traduit en hollandais et enrichi des notes par M. *Van Utenhove*.

Stockholm et de plusieurs autres sociétés savantes. Il vit en même temps son sort s'améliorer par les bienfaits du Roi, et, avec le titre de chambellan, il reçut la croix du lion Belgique; mais, fidèle aux statuts de l'ordre de Malte, il ne porta point cette marque distinctive. Nous devons chercher à les mériter toutes; mais notre devoir est de n'en porter aucune, disait-il, bien différent en cela de beaucoup de gens qui aimeraient mieux les porter toutes que de chercher à en mériter une seule.

Pour témoignage de sa reconnaissance, il dédia au Roi son dernier ouvrage intitulé : *Un Peu de Tout, ou Amusemens d'un Sexagénaire, depuis* 1807 *jusqu'en* 1816 (1). Ce sont des entretiens sur la théorie des probabilités, des observations sur la littérature, la philosophie et les langues. On y trouve aussi des poésies grecques et latines de l'auteur. On aurait tort de traiter ces délassemens d'un vieillard avec trop de sévérité ou d'y attacher plus d'importance qu'il ne le faisait lui-même. « Mon unique but, dit-il, est de laisser, avant mon départ, un petit souvenir à mes amis et à mes connaissances. Si, cependant, quelques exemplaires parviennent entre les mains des personnes dont je n'ai pas l'avantage d'être connu, j'espère qu'elles y trouveront partout l'homme bon, juste et honnête : et c'est à quoi se borne mon ambition. » Ce sont des qualités qu'on ne lui refusera certainement pas après avoir lu ses opuscules, et si l'on n'y trouve pas le cachet d'un talent littéraire, du moins on doit être surpris de la grande variété de connaissances dont il fait preuve.

Je ne retracerai point ici en historien fidèle tous les événemens de la vie de M. *De Nieuport;* ces événemens ont trop peu d'importance, surtout ceux qui se rattachent à ses premières années. Il répétait lui-même que sa carrière octogénaire avait été partagée en deux parties dont la première avait été consacrée

---

(1) A Bruxelles, chez P.-J. *De Mat*, in-8°, 1818.

à l'oisiveté et l'autre au travail. Ce singulier partage est justement ce que la vie de notre compatriote offre de plus remarquable ; et c'est dans la connaissance de sa personne qu'il faut en chercher les causes. Peut-être les détails que je vais présenter pourront-ils conduire à cette connaissance ; on voudra bien m'excuser si je me trouve souvent dans le cas de citer des faits qui me sont personnels ; j'écris de souvenir, et j'ai cru ne devoir mentionner autant que possible que ce que j'avais vu ou entendu moi-même.

M. *De Nieuport* avait au delà de 73 ans lorsque je le vis pour la première fois ; je venais d'être appelé à Bruxelles pour remplir une chaire de mathématiques ; mon premier soin fut de courir à la demeure de celui qui, depuis si long-temps, était pour ainsi dire le seul représentant des sciences exactes dans nos provinces méridionales. Je trouvai un beau vieillard, d'un taille élevée, d'un parler brusque, mais plein de franchise et de bienveillance : j'en fus reçu avec bonté ; ma jeunesse, et mon goût pour sa science de prédilection l'intéressèrent en ma faveur ; il avait commencé par me recevoir en père, et peu à peu en causant de sciences, il finit par se mettre à mon niveau et à me parler en véritable ami des divers objets de mes études. Dans son âge avancé, il avait conservé toute l'ardeur, toute la vivacité de la jeunesse ; quand la conversation s'animait, on s'apercevait facilement à ses mouvemens d'impatience, au tremblement de ses mains, à l'agitation de toute sa personne, que sa langue ne suffisait plus à rendre toutes les pensées qui se présentaient presqu'en même temps à son esprit. Son parler était vif, coupé, plein d'images ; j'ai connu peu d'hommes qui eussent un langage plus pittoresque. Sa figure, dont les traits n'étaient pas sans noblesse, et dont la teinte brunie par les feux du midi contrastait avec la blancheur de ses cheveux, avait une expression animée ; ses yeux étaient petits et bleus mais pleins de vivacité. Quand la discussion s'échauffait, son geste même avait de l'éloquence, et il ne fallait jamais attendre sa réplique pour connaître le fond de sa pensée.

Il occupait une petite habitation qui lui avait servi de retraite pendant ses revers ; un fidèle serviteur lui était demeuré attaché dans toutes les circonstances de sa vie. Le rétablissement d'une partie de sa fortune ne paraissait avoir apporté aucun changement dans son intérieur.

Il se tenait habituellement dans sa bibliothéque, qui était assez peu fournie ; mais qui suffisait amplement à ses besoins ; car il lisait peu de livres, mais il usait ordinairement ceux qu'il lisait ; à peu près comme Euler qui, dit-on, renouvelait annuellement ses tables de logarithmes et sa Bible. Un cabinet voisin de la bibliothéque renfermait un lit sur lequel le commandeur se reposait d'ordinaire tout habillé. Je fais ma toilette le soir, disait-il, je puis de cette manière me mettre au travail à toute heure de la nuit ; en un instant je suis sur pied. Cette habitude contractée pendant ses caravanes, avait été reprise pendant la révolution, époque à laquelle il fut contraint de se tenir caché : il l'avait conservée ensuite comme utile à son genre d'études. Je vois mieux pendant la nuit, continuait-il ; ma lanterne-magique se déroule mieux sur un fond noir. Il avait aussi l'habitude de travailler en se promenant ; et il ne faisait guère dans son cabinet que les développemens de calculs qui nécessitent des écritures. C'était sur une ardoise qu'il faisait ses premières recherches ; puis il consignait ses résultats sur le papier avec un soin vraiment minutieux. Du reste on concevra cette précaution, si l'on songe à quels désagrémens expose quelquefois, en mathématiques, un seul caractère mal indiqué.

M. *De Nieuport* portait fort loin l'amour de l'exactitude, surtout dans tout ce qui était nombre. Je le trouvai un jour très-mécontent d'un article biographique qui venait de paraître et qui le concernait ; c'était à une époque où les passions étaient encore vivement agitées. Comme il s'était toujours fortement exprimé contre la révolution qui lui avait été si funeste, et qu'il avait cru voir une tendance aux mêmes excès dans le libéralisme dont le mot alors était nouveau pour lui, je m'imaginai d'abord qu'on avait rudement froissé ses

opinions. Je parcourus rapidement l'article, sans deviner le motif de son humeur. « Voici bien nos faiseurs, dit-il, ils m'ont fait naître le 14 au lieu du 13 ; et puis ça se répète : et puis c'est de l'histoire. » « Faire de l'histoire, répétait-il souvent, c'est faire des livres avec des livres. » Et il ne faut pas en conclure que ce fut chez lui faute de discernement. Peu d'hommes lisaient moins de livres que le commandeur ; et il paraît que dans ses études historiques, il avait eu le malheur de n'employer que des compilations mal faites ; son jugement ne portait donc que sur ces derniers ouvrages. Ses amis lui reprochaient doucement ses préventions ; et, sur leurs instances réitérées, il se mit à lire quelque-uns des ouvrages modernes où l'histoire est considérée sous un point de vue philosophique ; il avoua dès-lors ingénument qu'il s'était trompé. Mais il ne revint guère sur le compte des ouvrages d'érudition, quoique lui-même se fût livré à ce genre de travail, en étudiant les œuvres de *Platon*. C'est faire des livres avec des livres, était toujours son dernier mot. Il ne niait pas l'utilité de ces ouvrages, mais il les estimait peu. Ce ne sont pas là des auteurs, disait-il ; vous me donnez des manœuvres pour des architectes.

J'ai dit que le mot libéralisme l'effarouchait, et ceci tenait plutôt à la nouveauté du mot qu'à la chose en elle-même. « Je ne sais vraiment ce qu'ils veulent, disait-il ; de mon temps, libéral était synonyme de généreux, qui donne beaucoup. » Comme il n'avait pas l'habitude de dire sa pensée à huis clos, et que son humeur se manifestait toujours d'une manière âpre et souvent mordante, il s'attira de la part des journaux, des articles qui n'étaient guère de nature à le calmer. Peut-être l'aurait-on mieux persuadé de l'idée qu'on devait attacher au mot libéralisme en montrant un peu plus de tolérance envers un vieillard, d'une réputation intacte, d'un savoir profond, et qui, dépouillé de tous ses biens, s'était montré ferme dans l'adversité ; qui avait refusé les bienfaits de l'empire, mais sans jactance et seulement parce qu'il ne croyait pas devoir les accepter. Ces attaques contre sa personne et ses ouvrages lit-

téraires produisirent sur son esprit une fâcheuse impression qui ne s'effaça jamais entièrement. Il s'aperçut que, sans modifier ses principes et sa règle de conduite, il pouvait fort bien s'entendre avec les hommes aux yeux desquels le mot libéralisme était quelque chose de mieux qu'un signe de ralliement pour les partis et les passions; mais il marqua toujours de la répugnance à se rapprocher de ceux qu'il croyait avoir eus pour ennemis.

Une chose pourra sans doute étonner, c'est son changement d'opinion à l'égard d'un homme qui tint long-temps dans ses mains les destinées de l'Europe. Pendant sa toute-puissance, il avait constamment refusé ses bienfaits; après sa chute, il paya un tribut d'admiration à ce qu'il avait fait de grand. Je l'ai méconnu, disait-il pendant les dernières années de sa vie; et on le concevra facilement en considérant l'isolement dans lequel il vivait et les plaies récentes que la révolution lui avait laissées. A coup sûr, ces aveux n'étaient pas intéressés; et jamais homme n'est convenu de ses torts avec plus de candeur dès qu'il avait cru les reconnaître.

Comme tous les hommes qui ont une imagination vive et un cœur aimant, M. *De Nieuport* avait une grande susceptibilité, et se prévenait assez souvent pour ou contre une personne : mais ses retours avaient quelque chose de touchant; et la manière affectueuse dont il cherchait à faire oublier ses torts, aurait presque fait regretter qu'il n'en eût point eus.

On veut que l'homme dont l'imagination est ardente, demeure constamment impassible; mais comment conserver toujours le calme nécessaire, et ne point s'affecter, en voyant juger avec légèreté ce qui a souvent été l'objet de longues veilles, ou en voyant présenter sous un faux jour les intentions les meilleures, surtout si l'on se sent froissé au milieu des partis, et si l'on veut s'exprimer hautement et selon sa conscience. La vérité n'a de charmes pour le commun des hommes qu'autant qu'elle flatte leurs passions; elle se trouve honteusement répudiée, si elle ne peut s'accommoder à leurs caprices. L'honnête homme témoin de ces viles transactions,

se replie sur lui-même et finit bien souvent par s'isoler ; il trouve du moins dans la retraite ses premières illusions. Peut-être le commandeur ne conservait-il pas toujours cette modération si désirable. L'impétuosité de son caractère lui arrachait quelquefois des mots durs et d'autant moins pardonnés qu'ils étaient presque toujours spirituels. « Ne m'en parlez pas », disait-il d'un jeune pharmacien qui avait l'habitude de se vanter de ses connaissances en physique ; « ne m'en parlez pas ; c'est un homme dont les idées sont rétrécies ; il voit toujours la nature à travers la canule de sa seringue. » « Quel homme, disait-il d'un autre, il vous désespère par sa lenteur ; ses phrases sont comme l'épée de Charlemagne, longues, larges et plates. »

Il est juste de dire cependant que ses réparties ne devenaient un peu vives qu'autant qu'il se sentait blessé lui-même. Il était surtout bienveillant pour les jeunes gens qui abordaient la carrière des sciences. S'il parvenait à les animer, à les mettre à l'unisson avec lui, on le voyait radieux et le cadeau de ses ouvrages était le résultat ordinaire de la visite. S'il se trouvait au contraire frustré dans son attente, on s'apercevait facilement qu'il éprouvait un sentiment pénible. « Ça ne va pas, disait-il, je l'ai essayé, mais il n'a pas mordu. »

Vers la fin de sa vie, M. *De Nieuport* avait entièrement cessé de s'occuper de mathématiques, non qu'il eût cessé d'aimer cette science ; mais il ne se sentait plus l'énergie ni la force de tête nécessaires pour se livrer à de nouvelles recherches. « L'appétit n'y est plus, disait-il, c'est un signe de désorganisation. » Il regrettait surtout de n'avoir pu suivre les recherches des géomètres modernes.

Il craignait l'oisiveté comme le plus grand fléau : aussi les études littéraires qui exigent en général moins d'attention que les sciences, l'occupèrent jusqu'au dernier instant. Il relisait ses livres favoris, y faisait des annotations, ou s'amusait à composer des vers que lui suggérait l'un ou l'autre passage. L'idée de la gloire qu'il pouvait acquérir par ses propres ouvrages semblait subordonnée chez lui à celle du plaisir

qu'il retirait de leur composition, aussi passait-il facilement des sciences aux lettres et à la philosophie; mais il paraissait toujours cultiver les lettres et la philosophie comme une application des sciences mathématiques.

Depuis quelque temps M. *De Nieuport* éprouvait des maux de poitrine, et une gêne continuelle dont il se plaignait fréquemment; ses facultés intellectuelles avaient cependant conservé toute leur force, et le physique n'avait pas éprouvé d'altération bien sensible. Quand je le vis pour la dernière fois, c'était la veille de sa mort; j'étais sur le point de partir pour l'Angleterre; j'allais lui faire mes adieux, j'étais loin de prévoir qu'ils dussent être éternels. Je le trouvai assis à la même place et dans le même fauteuil où je l'avais vu lors de ma première visite; j'étais avec M. *Dandelin*, qui devait m'accompagner dans mon voyage. Le bon vieillard parut heureux de se retrouver avec nous; il nous tendit affectueusement la main, et nous parla de notre séparation, de l'objet de notre voyage, de nos études. Il reprit bientôt sa vivacité naturelle; puis, comme nous lui demandions quelle était la nature de son mal, « Que sais-je, dit-il gaiement, il n'y a qu'une manière de se porter bien, et il y en a mille d'être malade. C'est toujours la même oppression; c'est mon diable qui me tient là.... » et il montrait sa poitrine. Le lendemain, vers la nuit, je retournai avec mon ami à la demeure du commandeur pour avoir des nouvelles de sa santé dont on venait de nous parler d'une manière alarmante. Une faible lumière brûlait dans la bibliothéque où il se tenait habituellement; nous nous arrêtâmes quelque temps, évitant de sonner de peur de troubler peut-être son sommeil.... c'était l'heure hélas! à laquelle il venait de rendre le dernier soupir. Il fut sur pied presque jusqu'au dernier instant; son agonie fut courte; le jour de sa mort, il eut quelques instans de délire. Vers 10 heures du soir (20 août 1827), son mal habituel parut agir avec plus de violence; il fut saisi d'un vomissement subit et expira au même instant.

Sur les couleurs de différentes flammes et sur les spectres qu'elles produisent quand on les analise au moyen du prisme; par M. J. Herschel (1).

La flamme du cyanogène, quand on l'observe à travers une étroite ouverture, présente une teinte pourpre bordée d'un jaune verdâtre. Lorsqu'on l'observe à travers un prisme, elle forme un spectre divisé d'une manière tout-à-fait particulière en différentes parties limitées par plusieurs bandes obscures. Ces bandes partagent assez uniformément l'étendue du spectre; et les parties lumineuses présentent toutes à peu près la même intensité d'éclat. Cette flamme nous a été montrée, à M. *Talbot* et à moi, par M. *Faraday*.

La flamme des *feux rouges* (*red fire*) qu'on emploie au théâtre (on la produit en brûlant du nitrate de strontiane), présente deux teintes rouges brillantes. Le spectre qu'elle forme au moyen du prisme, offre de nombreuses solutions de continuité; mais la circonstance la plus remarquable est la formation d'une ligne extrêmement brillante d'un bleu vif et absolument distincte de tout le reste.

La flamme du potassium qui brûle dans l'iode, donne encore un spectre d'une forme singulièrement remarquable.

La lumière provenant d'un homard qui approche de l'état de putréfaction, est d'un vert-bleuâtre. Analisée au moyen du prisme, elle donne un spectre dont l'éclat est trop faible pour qu'on puisse distinguer quelque différence de couleur entre le milieu et les extrémités.

---

(1) M. *Herschel*, en passant par Bruxelles, a eu l'obligeance de me communiquer quelques notes pour la traduction de son excellent *Traité de la lumière*, dont la première partie paraîtra sous peu. J'ai cru que les expériences précédentes qui sont faciles à répéter, pourraient intéresser les lecteurs de la *Correspondance*. A. Q.

Nouvelles expériences sur le pendule, par MM. Bessel et Sabine.

Au moyen d'un appareil de son invention, M. *Bessel* a fait de nouvelles expériences sur les oscillations du pendule, qui l'ont conduit à quelques remarques importantes sur des causes d'erreur dont on n'avait pas tenu compte jusqu'à présent. Son appareil consiste en une barre verticale en fer de 10 pieds de longueur sur 4 pouces de largeur et 4 lignes d'épaisseur, laquelle se trouve fermement attachée à un fort encadrement en bois de mahoni, qui lui-même est fixé contre un mur sans avoir de communication avec le sol. Perpendiculairement à cette barre s'élève un petit appui de fer sur lequel repose l'extrémité d'une toise étalon faite à Paris, par l'artiste *Fortin*, et comparée avec soin à la toise du Pérou, que l'on conserve dans la même ville. Des ressorts maintiennent la toise dans une position verticale, et l'appareil est en partie soutenu par des contrepoids attachés vers son milieu. Quant au pendule, il se compose simplement d'une balle de cuivre et d'un fil d'acier; la suspension se fait successivement à l'extrémité supérieure de la toise étalon et au petit appui sur lequel repose l'extrémité inférieure; de manière que, dans les deux cas, la balle se trouvant suspendue à même hauteur, la différence de longueur du fil est égale à celle de la toise. Nous regrettons de ne pouvoir faire connaître ici toutes les précautions qui ont été employées pour écarter ou atténuer toutes les sources d'erreur. Voici maintenant les principales conséquences que M. *Bessel* a déduites de ses expériences.

Depuis *Newton*, on suppose que si la masse d'un corps qui tombe à travers l'atmosphère est m, et la masse de l'air déplacé m', la force accélératrice qui agit sur le corps en mouvement égale $\frac{m-m'}{m}$; et les réductions du pendule ont toujours été faites d'après cette hypothèse. On admet que la force $m-m'$ qui agit sur le corps, se distribue à la masse

m; mais elle ne s'exerce pas seulement sur *m*, mais encore sur les particules d'air mises en mouvement par *m;* par conséquent le dénominateur dans l'expression de la force accélératrice doit nécessairement être plus grande que *m*, et doit être augmentée par l'introduction d'une nouvelle fonction. L'oscillation du pendule doit donc être retardée par le milieu dans lequel elle s'effectue, et la réduction au vide doit être plus grande qu'on ne l'a supposée jusqu'à ce jour.

En cherchant à évaluer cette perte de force, M. *Bessel* a trouvé que, quand les oscillations ont lieu dans des milieux d'une faible densité, comme les fluides élastiques, l'effet négligé jusqu'à présent qui tend à diminuer l'oscillation, équivaut à l'effet produit par une simple addition à l'inertie du pendule. Cette addition est une constante que, dans tous les cas, l'expérience doit déterminer. On peut y parvenir soit en faisant osciller le pendule dans le vide, soit en faisant osciller dans l'air deux pendules de même figure, mais de densités très-différentes. M. *Bessel* a préféré la dernière méthode, et il a fait osciller successivement une balle de cuivre et une balle d'ivoire de même dimension. Le résultat de ses expériences a été que la réduction au vide pour le pendule qu'il employait, est environ double de la correction qu'on aurait admise autrement.

M. *Bessel* a fait osciller encore des pendules dans différens milieux, et ses expériences sont d'accord avec ce qu'il avance sur l'erreur dans laquelle on est tombé jusqu'à présent. Ce célèbre observateur a examiné aussi une question extrêmement délicate, celle de l'influence que peuvent avoir et la figure cylindrique de l'arête du couteau qui porte le pendule, et l'élasticité des plans qui servent de support. Toutes ces recherches intéressantes se trouvent consignées dans le volume des mémoires de Berlin, qui vient de paraître; et ont été analisées par M. le capitaine *Sabine* qui avait eu le manuscrit de M. *Bessel* entre les mains, et qui avait vu l'appareil chez M. *Schumacher*, à l'observatoire d'Altona. (*An account of M.* Bessel's *pendulum experiments.*)

M. le capitaine *Sabine*, qui a eu l'obligeance de nous communiquer son intéressante notice, y a joint encore deux mémoires sur des expériences du pendule qu'il a faites récemment : le premier a pour objet de déterminer le nombre d'oscillations faites par un pendule invariable à l'observatoire de Greenwich et dans la maison de M. *Browne*, à Londres, où le capitaine *Kater* a fait ses expériences. Le résultat de ces observations est que le pendule qui fait à Londres 85969,34 oscillations par jour en fait 85969,78 à Greenwich, d'où résulte une différence de 0,44 oscillations en excès pour Greenwich, tandis que sa position comporterait un retard de 0,27. Cette différences qui est le résultat d'un grand nombre d'observations indiquerait une inégalité dans la conformation des terrains.

Le second mémoire de M. *Sabine* a pour objet la réduction directe au vide pour les oscillations d'un pendule invariable, correction que M *Bessel* a étudiée en suivant une autre marche. L'appareil dont M. *Sabine* s'est servi a été construit par M. *Newman*, pour le prix de 25 liv. sterl. Il consiste en six pièces, sans y comprendre l'encadrement de fer sur lequel porte le pendule et qui est fixé au mur. Le pied est en fer fondu, de l'épaisseur de 2 pouces; sa forme est cylindrique, et la hauteur est de 1 pied sur 1 pied de diamètre intérieur. Il est ouvert à la partie supérieure et fermé inférieurement par une lame de 3 pieds de long sur 16 pouces de large, qui s'appuie sur quatre vis destinées à le mettre de niveau. Un tuyau de métal établit une communication entre l'intérieur et la machine pneumatique. Les trois pièces qui se succèdent au-dessus du pied sont des tubes de verre d'une forme un peu conique et usés à l'émeri sur leurs faces de contact. Vient ensuite le support du pendule au-dessus duquel est un récipient qui ferme le tout. Le vide n'a pu être fait que d'une manière approchée, parce que l'air rentrait, à ce qu'il paraît, par les pores du fer; et pendant les expériences, il fallait faire marcher avec précaution la machine pneumatique. Deux pendules ont été mis en expérience : l'un qui avait servi à M. *Sabine* dans ses premières observations, et l'autre qui est destiné à l'observatoire de Bruxelles. Le ré-

sultat de ces expériences, conformément aux remarques de *Bessel*, est que la réduction qui, comme on la calculait d'abord, aurait été dans l'air libre de 6,26 oscillations par jour, à la température de 45° Fahr. et sous la pression de 30 pouces anglais, se trouve trop faible de 4,1 oscillations. M. *Sabine* a fait osciller aussi le pendule dans le gaz hydrogène. En voyant toutes ces expériences intéressantes, nous regrettons vivement que la lenteur des travaux de notre observatoire ne nous permette pas d'y prendre part, quoique la munificence du gouvernement nous ait procuré tous les instrumens nécessaires pour le faire.

M. *Sabine* nous adresse encore un mémoire sur l'inclinaison de l'aiguille magnétique qui était, à Londres, au mois d'août 1828, de 69° 47′, un peu moindre que chez nous.

Sur la construction d'une lunette achromatique de 7.8 *pouces d'ouverture, au moyen d'une lentille fluide;* par M. P. Barlow.

Nous avons déjà eu occasion de parler plusieurs fois des travaux de M. *Barlow* sur l'emploi des liquides dans la construction des lunettes achromatiques. Ce savant distingué vient de voir ses efforts couronnés par de nouveaux succès. Il est parvenu en combinant ensemble deux lentilles, l'une de verre et l'autre liquide, à construire une lunette de 7.8 pouces d'ouverture, qui dépasse par conséquent d'un pouce environ les plus larges ouvertures qu'on fût parvenu à obtenir jusque-là en Angleterre. Le tube a 11 pieds de longueur et 12 en y comprenant le porte-oculaire; ce qui correspond à une longueur effective de 18 pieds dans les lunettes ordinaires. L'instrument supporte un grossissement de 700 fois pour des étoiles doubles les plus difficiles du catalogue de MM. *South* et *Herschel;* et les étoiles, avec ce grossissement, se trouvent parfaitement terminées quoique le degré d'éclairement laisse peut-être à désirer.

La distance des deux lentilles doit être un peu plus grande

que la moitié de la distance focale de la lentille de verre; ainsi la lentille de verre ayant une distance focale de 78 pouces, la lentille liquide qui a une distance focale de 59,8 pouces, se trouve placée à 40 pouces derrière elle, et produit une longueur focale de 104 pouces, ce qui fait en totalité 12 pieds. Le placement des lentilles exige les plus grandes précautions.

Quant à la marche à suivre pour renfermer le liquide (le sulfure de carbone), l'expérience semble prouver que la suivante doit être préférée : après avoir déterminé par des essais successifs la position la plus convenable pour les verres qui doivent le contenir, l'on expose ces verres avec l'anneau sur lesquel ils s'appuient de manière à se fermer bien hermétiquement, à une température artificielle qui dépasse la plus élevée à laquelle on soit dans le cas d'observer. On maintient quelque temps à cette température le liquide dont on remplit la cavité de la lentille; puis, après avoir fermé le tout, on produit par l'évaporation un refroidissement soudain, et par suite une condensation du liquide en même temps qu'une pression extérieure de l'air qui agit pour empêcher la séparation des verres : il se forme naturellement à l'intérieur de la lentille un petit vide qui se remplit par la vapeur du liquide. La pression de l'air moins celle de cette vapeur est une force qui agit constamment à l'extérieur pour tenir les verres serrés entre eux. On soude alors les bords extérieurs avec le sérum du sang humain ou avec de la forte colle de poisson et de petites lames de métal bien flexibles. M. *Barlow* assure que la première lunette de 3 pouces d'ouverture qu'il a construite de cette manière depuis plus de quinze mois, n'a pas subi la moindre altération et que le liquide n'a éprouvé aucun changement sensible ni en quantité ni en propriétés physiques.

Nous avons extrait ces détails d'un mémoire que nous devons à l'obligeance de M. *Barlow*, et qui paraîtra dans les *transactions philosophiques* pour 1829. On y trouve aussi la description du pied de l'instrument et du petit observatoire que l'auteur a dû faire construire pour abriter l'instrument et pour explorer le ciel de la manière la plus commode.

Sur une nouvelle pompe servant à comprimer l'air. Extrait d'une lettre de M. Hachette.

Lundi dernier 18 mai, sur le rapport de M. *Navier*, l'Académie des sciences a décerné un prix de 1500 fr. à M. *Thilorier*, pour une pompe destinée à donner, par une action continue, de l'air comprimé à mille atmosphères. Cette pompe est manœuvrée par dix hommes appliqués aux bras d'un levier, qui a sept pieds d'un côté du point d'appui et dix pieds de l'autre. Elle se compose de trois corps de pompe verticaux, de diamètres inégaux. Les tiges des pompes du plus grand et du moyen diamètre sont chacune à 14 pouces du centre fixe du levier; la tige de la pompe du plus petit diamètre est du même côté que la tige du moyen diamètre, à vingt-quatre pouces de l'axe du levier; elle marche par un étrier, de manière que l'air soit foulé en même temps dans la grande et la petite pompe. Pendant que ce refoulement a lieu, l'air qui est au-dessous du piston de la grande pompe, passe dans la pompe moyenne; et lorsqu'on soulève les pistons de la grande et petite pompe, on foule l'air dans la pompe moyenne; l'air comprimé dans cette pompe, au-dessous du piston, passe dans la petite pompe, dont le piston s'élève.

Ainsi la grande pompe communiquant avec le réservoir d'air à comprimer, la petite pompe peut fournir, par une action continue, de l'air comprimé. On remarquera que, dans ce jeu des trois pompes, la compression se fait successivement dans les deux pompes extrêmes et dans la moyenne; ce qui diminue l'effort des hommes appliqués au levier, aux dépens du temps, et d'ailleurs, l'action est continue, quoique le jet d'air comprimé ne le soit pas.

Une boule en bronze de 8 pouces et demi de diamètre, de 11 lignes d'épaisseur, n'a pas tenu l'air comprimé par cette machine.

Paris, le 23 mai 1829.

TABLEAUX STATISTIQUES

POUR BRUXELLES (1).

Voitures de place, Voitures publiques, etc., dans la ville de Bruxelles (année 1827).

	NOMBRE.	PLACES.	DÉPARTS par semaine.
Fiacres de place et calèches	130		
Grandes diligences royales	14	15	98
Diligences ordin. à destination éloignée .	38	15	266
Petites diligences destinées à la province .	22	12	154
TOTAUX des diligences.	74	42	518

Toutes les voitures dont il est ici question sont à quatre roues.
On a délivré pendant la même année 1827 :

Passeports pour l'intérieur. 359
— pour l'étranger 485
— aux indigens 112

Les passeports pouvant être suppléés par d'autres pièces, on ajoutera à ces données les renseignemens suivans qui n'ont pas le caractère officiel, et qui, toutefois, présentent une approximation suffisante :

Passeports visés aux nationaux 1248
— — aux étrangers 7202
Permis de séjour 2040

---

(1) Les détails que nous présentons ici, sont extraits de tableaux fort intéressans, que M. *Cuylen*, secrétaire de la régence de Bruxelles, avait remis à la commission de statistique du Brabant méridional, avant sa suppression, et dont il a bien voulu depuis nous permettre de faire usage. A. Q.

Fourrages, combustibles et matériaux de construction consommés à Bruxelles, de 1819 *à* 1827.

		1819	1820	1821	1822	1823	1824	1825	1826	1827
Foin	(1) *tonneaux*	9601	10189	9445	8834	8671	9055	9075	8900	9734
Paille	»	6947	7842	7727	7641	7399	7332	7591	7263	7188
Avoine	*hectol.*	74589	89682	89153	86377	82063	93881	93274	79821	70620
Bois à brûler	*stères.*	24811	32121	30898	25073	27410	28270	27050	29210	28740
Fagots, racines, etc.	»	24064	26748	23548	21496	22064	20824	19620	19412	20836
Charbon de bois	*hectol.*	69142	82739	72216	72677	75288	75919	75919	76469	77214
Houille	*tonneaux.*	39831	49754	50447	45336	49674	49857	50527	51515	56626
Chaux et plâtre	*hectol.*	57350	68095	62535	67130	61280	74185	94935	101985	107335
Briques et briquettes	1000 *br.*	13067	16749	17888	16445	22725	32257	45489	41453	44351
Pierres bleues et blanches	*tonneaux.*	5551	7420	4861	4874	5568	16687	9383	8681	7806
Autres pierres	»	731	300	184	197	196	618	1683	563	220
Bois de construction	»	16803	18755	16154	17491	17221	21131	22702	23615	23239

(1) Le tonneau mentionné dans le tableau se compose de 1000 kilogrammes.

ÉTAT

Des consommations dans la ville de Bruxelles, de 1819 à 1827.

		1819	1820	1821	1822	1823	1824	1825	1826	1827
Vins	*hectol.*	12320	11094	8351	7384	8686	6625	6317	9509	9265
Vinaigre de vin	»	316	327	193	269	153	176	217	312	182
Esprits	»	553	927	890	630	546	675	547	289	478
Eau-de-vie et liqueurs. . . .	»	657	696	604	456	407	382	390	365	540
Genièvre	»	4650	5359	4892	4047	3836	6107	6680	6038	7079
Bières	»	319837	371996	399461	396757	346300	388014	403577	433181	351620
Vinaigre de bière	»	3783	3950	3916	3999	3761	4169	4210	3964	3838
Bœufs	*têtes.*	5502	5219	6237	7416	2990	3397	4300	3325	3461
Vaches et taureaux.	»	7343	8589	8588	7624	4935	5113	5813	6085	6094
Vea ux	»	7922	8452	8820	9482	8607	10473	11327	15642	17025
Moutons et agneaux	»	18351	16262	18942	20685	14524	14674	16731	25341	28876
Porcs	»	2033	2098	2398	2620	1892	2091	2836	3261	3368
Cochons de lait	»	1164	1134	1164	1028	32	56	104	105	65
Viande à la main.	*kil.*	261550	251081	238006	236317	538611	813260	465931	287179	263938
Jambons	*pièces.*	4127	6585	6562	5264	6650	7032	6283	6084	6737
Poisson de mer	*flor.*	238338	224506	211804	188452	209576	203663	226818	218618	218170
Morue	*tonnes.*	1559	1762	1380	1572	1237	1177	1455	1019	1107
Stockvisch.	*kil.*	100100	60049	83425	115179	104455	65531	123388	109953	66724
Huiles à manger	*hect.*	738	532	506	365	323	711	504	504	458

NOMBRE ET VALEUR MOYENNE

Des Bestiaux vendus sur les marchés de Bruxelles, et destinés à l'abattage pendant les années 1819 — 27.

Nature des Bestiaux.	1819	1820	1821	1822	1823	1824	1825	1826	1827
Bœufs.	5502	5219	6237	7416	2990	3397	4300	3325	3460
Vaches, 1re qualité	3043	3089	3088	2624	935	1513	1523	1085	694
— et genisses, 2e et 3e qualité. .	4300	5500	5500	5000	4000	3600	4300	5000	5400
Veaux, 1re qualité	3122	3052	3320	3682	3607	6473	6827	5642	6025
— 2e et 3e qualité	4800	5400	5500	5800	5000	4000	4500	10000	11000
Moutons, 1re qualité.	8351	7262	8442	8685	5524	7674	7960	5359	6876
— 2e et 3e qualité.	10000	9000	10500	12000	9000	7000	8000	20000	22009

Bœufs, valeurs moyennes.	120 fl.	110	120	110	125	108	125	120	125
Vaches, 1re qualité	100	100	96	95	95	90	100	100	100
— et génisses, 2e et 3e qualité . .	65	60	60	65	65	68	70	65	65
Veaux, 1re qualité	32	30	30	30	30	25	30	32	32
— 2e et 3e qualité	14	12	14	14	12	15	18	15	15
Moutons, 1re qualité.	10	9	10	10	10	9	11	10	11
— 2e et 3e qualité.	6	5	6	5	6	6	7	5	6

Secours administrés aux individus noyés en rivière dans le ressort de Bruxelles, pendant neuf années.

ANNÉES.	SECOURUS UTILEMENT.	SECOURUS INUTILEM.	NON SUSCEPTIBLES DE SECOURS.	TOTAUX.
1819	12	»	4	16
1820	9	»	3	12
1821	5	1	4	10
1822	12	»	5	17
1823	9	1	3	13
1824	10	»	5	15
1825	14	»	7	21
1826	18	1	4	23
1827	19	»	14	33
TOTAUX. .	108	3	49	160

Parmi ces individus, neuf seulement ont été retirés de l'eau hors de Bruxelles, dont sept pendant l'année 1827. Il est remarquable aussi que tous ont été reconnus, hormis un seul en 1820. Nous ajouterons à ce qui précède quelques renseignemens sur le sexe, et sur les causes qui ont amené la submersion.

ANNÉES.	HOMMES.	FEMMES.	NOMBRE DES NOYÉS EN SE BAIG.	ACCID.	VOLONT.	CAUSE INC.
1819	11	5	»	14	2	»
1820	9	3	»	9	2	1
1821	7	3	»	8	2	»
1822	12	5	»	14	1	2
1823	7	6	»	6	3	4
1824	11	4	»	10	2	3
1825	17	4	»	17	3	1
1826	17	6	»	18	5	»
1827	14	19	2	19	7	5
TOTAUX. .	105	55	2	115	27	16

Construction d'un nouvel Observatoire à Genève.

Nous venons de recevoir le *rapport sur le projet de loi pour l'établissement d'un nouvel observatoire à Genève*, fait au conseil représentatif, le 8 mai 1829, par M. le conseiller *Puerari*, rapporteur du Conseil-d'État. Nous pensons que les lecteurs de la *Correpondance* verront avec plaisir quelques passages de cet écrit, digne sous tous les rapports de la haute réputation que Genève s'est acquise par son amour pour les lettres et les sciences, et par ses constans efforts pour leur propagation. Heureuses les villes administrées par des magistrats aussi éclairés, et qui savent apprécier avec tant de justesse l'influence qu'exercent les sciences sur le bien-être des citoyens, et le relief qu'elles donnent aux pays qui les accueillent noblement et leur ouvrent des asiles dignes d'elles.

« Qu'est-ce au fond que vouloir posséder un observatoire? C'est vouloir un établissement, qui, par la nature de l'édifice et des instrumens, permette d'y faire des observations vraiment utiles aux progrès de la science. Car, si par défaut de l'un ou des autres, on n'y pouvait faire que des observations imparfaites, il est clair que l'établissement n'attirerait aucun relief sur le pays, et que par conséquent toute dépense pour n'arriver qu'à ce point serait de l'argent mal employé.

On peut donc regarder comme démontré, que tout observatoire, où l'on ne pourra faire des observations dignes d'être prises en considération par les astronomes qui se dévouent au calcul des résultats, d'après les observations directes, n'ajouterait rien de beau, de bon, ou d'utile aux établissemens publics du canton, et que si l'on en veut un, il faut s'élever au moins au *minimum* requis par l'état actuel de la science.

Maintenant, qu'est-ce que ce *minimum*, auquel évidemment

l'on doit se borner à atteindre? C'est ce qu'il reste à déterminer.

On compte de nos jours dans le monde 22 observatoires *vraiment utiles*; savoir : 2 en France, 4 en Angleterre, 5 en Italie, 7 en Allemagne et dans le Nord, 1 (en construction) (1) dans les Pays-Bas, 1 au Cap de Bonne-Espérance et 1 à Paramatta, dans la Nouvelle Galles du Sud. L'on n'admet pas dans ce calcul les observatoires où l'on peut cependant observer une éclipse, découvrir une comète, etc., parce que ce genre d'observations, qui n'exige pas des instrumens très-puissans, ne suffit point pour leur mériter ce nom; l'astronomie n'accorde proprement ce titre, qu'à ceux où peuvent se déterminer, avec une rigoureuse précision, les *ascensions droites*, les *déclinaisons* et les *distances micrométriques*; sans parler des curieuses recherches sur la constitution des corps célestes, qui ne sont accessibles qu'aux plus puissans télescopes et à des lunettes très-fortes.

Dans cette vingtaine d'observatoires utiles, 5 ou 6 du premier ordre peuvent seuls donner des déterminations précises et faciles des *déclinaisons*, à l'aide de grands cercles méridiens, dont le prix très-élevé, et la construction lente et difficile, expliquent la rareté. Mais ceux qui existent pourvoient suffisamment aux besoins de la science, et ce n'est pas évidemment à un observatoire de cet ordre là, que nous devons prétendre nous élever.

Quant aux deux autres déterminations, elles exigent aussi chacune un instrument spécial, savoir : une *forte lunette méridienne* (qui donne les ascensions droites) et *un équatorial*

---

(1) L'observatoire de Bruxelles, auquel le rapport semble faire allusion, a été commencé vers le mois d'avril 1827. On s'est borné, la première année, à en poser les fondemens; en 1828, on a construit le rez-de-chaussée; nous avons lieu d'espérer que le bâtiment sera entièrement achevé en 1830. La plupart des instrumens astronomiques qui ont été commandés par le gouvernement, sont déjà terminés; mais on n'a pu jusqu'à présent leur donner un emplacement convenable. A. Q.

selon le système moderne (pour suivre dans leurs parallèles les étoiles doubles, ou celles auxquelles on compare les comètes et les planètes qui s'en trouvent voisines); ensorte que si nous pouvions acquérir ces deux instrumens, en les joignant à l'excellente *pendule de Shelton* et au *cercle répétiteur* mobile de *Gambey* que nous possédons déjà, nous aurions le système des quatre instrumens absolument nécessaires pour un observatoire du rang des derniers de ceux qu'on a cités, mais tel pourtant qu'un directeur capable pourrait y faire des séries d'observations utiles, et tout-à-fait comparables à celles dont on fait emploi aujourd'hui pour le calcul des résultats.

Nous allons maintenant donner un aperçu de la dépense occasionnée par cette acquisition. On aurait, à présent, pour douze mille francs une lunette méridienne presque de premier ordre, munie de tous les perfectionnemens connus, et pourvue d'un cercle latéral d'un mètre de diamètre, lequel, au défaut d'un grand cercle méridien, donnerait du moins des déclinaisons fort approchées, et telles qu'il faut les connaître dans toutes les opérations.

Quant à l'*équatorial*, son prix serait aussi d'environ 12000 francs, et l'on pourrait être certain que pour la force de la lunette, comme pour la parfaite uniformité des divisions, des mouvemens et des pas de vis des micromètres, il serait digne en tout du célèbre artiste qui a tant perfectionné cet utile instrument, qui sera chaque jour d'un plus constant usage.

Nous pensons en effet, qu'il faudrait demander l'un et l'autre à M. *Gambey*, de Paris, le plus habile et le plus célèbre des constructeurs actuellement connus, et ne point tarder à faire cette commande, dès que V. S. auraient résolu cette acquisition, car avec toutes les demandes auxquelles il est appelé à satisfaire, il s'écoulera sûrement plusieurs années avant qu'il puisse livrer le dernier de ces instrumens. Mais il ne faudrait pas tarder à s'inscrire, d'autant que la retraite possible de M. *Cauchois*, constructeur excellent des objectifs placés dans les lunettes de M. *Gambey*, pourrait priver Genève d'en posséder d'aussi excellens. Quelque élevé que puisse pa-

raître le prix de ces instrumens, on conçoit qu'il est en raison de la lenteur et de la difficulté de leur exécution et du très-petit nombre d'artistes capables de les établir avec toute la perfection qu'ils exigent; il y a tout lieu de croire que l'on ne pourrait pas s'en procurer ailleurs d'aussi parfaits à un prix plus modéré.

Il est aussi à propos de faire remarquer, qu'aujourd'hui les progrès de l'art en ce genre sont tels, qu'on a peut-être atteint la limite de ce qu'on pourra jamais obtenir avec les instrumens. On en est venu à pouvoir mesurer des angles inférieurs à celui que forme au fond de l'œil la moitié de l'épaisseur d'un cheveu, et à n'avoir plus à lutter que contre la nature thermométrique des métaux employés, ou les influences atmosphériques sur les murailles et sur les pièces principales des instrumens. On ne peut donc redouter, ni qu'une prompte commande prévienne des perfectionnemens qu'on ne peut attendre, ni qu'en général des instrumens acquis de notre temps, se trouvent dans 40 ou 50 ans trop inférieurs aux besoins futurs de l'astronomie.

Fixée sur ces points importans et convaincue de la nécessité d'en admettre les conséquences, la commission présenta au Conseil-d'État l'esquisse d'un plan d'observatoire, qui a subi dès lors plusieurs modifications, sans que les dispositions principales en aient été changées, et qui a servi de base à celui qui a été ensuite adopté par le Conseil-d'État.

V. S. regarderont sans doute comme une circonstance heureuse et une présomption en faveur du projet, l'avantage qu'a eu la commission de pouvoir le soumettre au célèbre M. *Arago;* ce savant astronome, pendant le séjour qu'il a fait à Genève l'été dernier, a examiné avec beaucoup d'intérêt et de soin les plans et les devis, les a approuvés et a fourni plusieurs directions fort utiles.

Il nous reste maintenant à développer le plan qu'a adopté le Conseil-d'État pour la construction du nouvel observatoire.

Le projet qui est soumis à V. S. offre le plan d'un observatoire du second degré tel que nous venons de le déterminer; basé sur le système de trois instrumens principaux (outre les

pendules) savoir ; une *lunette méridienne*, un *équatorial* et un *cercle répétiteur*.

Il sera construit à une distance d'environ 130 pieds de l'ancien, sur le terre-plein du même bastion, le long de la traverse, entre la pointe du bastion et le petit bâtiment de la glacière; il se trouve là un espace plus que suffisant pour un bâtiment de 55 pieds de longueur sur 19 à 20 de largeur, dirigé penpendiculairement à la méridienne et presque parallèlement à la capitale du bastion. — Cette construction ne gênera nullement la circulation des pièces d'artillerie près du saillant et des faces du bastion; et le conseil militaire qui a examiné le plan sous ce rapport, ne croit pas qu'il nuise en aucune manière au système de défense de la place.

Cette position est une des plus élevées de Genève, et surtout une de celles d'où l'horizon, tel que les montagnes le limitent pour nous, se trouve le plus dégagé. La direction méridienne est entièrement libre des deux côtés; le levant est aussi entièrement découvert, et les arbres et maisons au couchant n'interceptent qu'une très-petite partie de l'horizon, qui deviendrait même tout-à-fait libre d'une hauteur moindre que celle de la coupole de l'observatoire actuel.

Le terrain étant rapporté, les fondemens devront être établis sur pilotis, et ceux des instrumens méridiens seront indépendans de ceux du bâtiment. Avec ces précautions, l'on peut espérer une parfaite solidité, et que l'édifice se trouvera entièrement à à l'abri des ébranlemens.

La hauteur du bâtiment est de 22 pieds environ jusqu'au faîte, surmonté aux extrémités Est et Ouest de deux tourelles à toit tournant, pareilles à celles de l'observatoire actuel, destinées à recevoir, l'une le *cercle répétiteur*, l'autre l'*équatorial*. — La salle du centre, destinée aux instrumens méridiens et pouvant servir aussi pour les démonstrations, communique par deux portes latérales, avec les cabinets de forme octogone qui supportent les tourelles; une porte d'entrée au nord, et une correspondante au midi, ouvrent sur un perron, qui s'étend le long des deux faces, afin de pouvoir faire quelques

observations en plein air, dans certains cas. — Deux coupures verticales et parallèles sont pratiquées, en outre, dans toute la hauteur du bâtiment, pour les instrumens méridiens, et devront être fermées par des volets, qui puissent s'ouvrir depuis le bas. — Telles sont les principales dispositions de ce bâtiment, dont le plan qui est sous les yeux de V. S. donnera une plus juste idée. — L'on a cherché à le rendre aussi simple qu'on le pouvait, sans y rien omettre d'essentiel et en y conservant de la symétrie et une sorte d'élégance. — Les devis ont été revus avec le plus grand soin et dans tous les détails. Ils s'élèvent, ainsi que V. S. l'ont vu, à la somme de 65,000 fl. dans laquelle se trouvent compris environ 10,000 fl. pour dépenses imprévues.

Quant à la somme de 55,000 florins, destinée à l'acquisition des nouveaux instrumens, le Conseil-d'État pense qu'elle doit être à la charge de la ville, à qui appartiennent déjà ceux que possède l'observatoire, ainsi que les autres collections destinées aux sciences, et la répartition qui a été faite de cette somme sur cinq années, lui rendra cette charge peu onéreuse.

Le Conseil-d'État ne s'est pas dissimulé que plusieurs de V. S. pourront trouver la dépense qui leur est proposée bien considérable pour un seul établissement. Mais elles voudront bien observer :

1° Qu'à moins de renoncer à avoir un observatoire, on ne saurait, dans aucun cas, éviter la dépense de le reconstruire, et que cela étant ainsi, il vaut mieux le faire actuellement tel qu'il doit être, que d'avoir ensuite à y revenir.

2° Qu'il s'agit ici d'un ensemble dont les différentes parties sont liées les unes aux autres, et ne pourraient pas facilement en être séparées, sans rendre l'établissement incomplet, et manquer ainsi le but que l'on s'est proposé.

3° Que de tels établissemens une fois fondés, provoquent souvent des donations utiles, et que l'on connaît déjà des personnes qui ont de pareilles intentions pour l'observatoire futur.

4° Que quoique l'observatoire soit en activité depuis la restauration il a très-peu coûté à l'état, comparativement aux

autres établissemens du même genre, tels que le jardin de botanique et le musée académique, auxquels on a toujours fait des allocations annuelles.

5° Enfin, que l'extension que l'on propose de lui donner, n'entraînera pas, de fort long-temps du moins, des frais d'entretien qui puissent faire craindre une nouvelle charge pour l'état. L'habile professeur qui est à la tête de cet établissement continuera à le diriger comme il l'a fait jusqu'à présent, sans autre intérêt que celui que lui offre l'étude à laquelle il a consacré sa vie et avec d'autant plus de zèle qu'il y trouvera plus de moyens de le faire fleurir et prospérer (1).

T. H. S., il s'agit de relever un établissement, dont l'état de langueur et de décadence est vu depuis long-temps avec chagrin par une classe nombreuse de nos concitoyens. — Un établissement qu'on ne peut laisser tomber, ou même subsister plus long-temps tel qu'il est, sans risquer de perdre ou de voir s'affaiblir une partie de cet intérêt qui attache à Genève, comme à une ville où les sciences sont honorées et cultivées. — Un établissement, qui, s'il est soutenu et encouragé comme il mérite de l'être, peut offrir, par la suite, à notre jeunesse académique une nouvelle carrière d'activité, un vaste et beau champ d'étude, un noble et précieux emploi de ses facultés.

Le moment pour le faire est peut-être le plus favorable que nous puissions choisir; il est indiqué par les circonstances, commandé par le besoin, sollicité par de pressans intérêts. — L'état de nos finances nous le permet.

Le plan qui est proposé est en harmonie avec notre situation et nos moyens; il est d'une exécution facile, il a obtenu l'approbation des savans les plus distingués, qui y prennent un vif intérêt et s'attendent que Genève ajoutera ce nouveau titre à tous ceux qui la leur fait aimer et estimer.

Si on ne le fait pas à présent, il est à craindre qu'il ne se pré-

(1) M. *Alfred Gautier* qui s'est fait avantageusement connaître au monde savant par différens mémoires sur l'astronomie, par un recueil d'excellentes notices sur les observatoires d'Angleterre, et particulièrement par son ouvrage historique sur le problème des trois corps. A. Q.

sente pas de meilleure occasion dans l'avenir; l'observatoire tombera, et nous aurons le regret d'avoir laissé périr un établissement dont l'utilité ne peut être contestée, qui aurait ajouté un grand prix à l'ensemble de nos institutions scientifiques, et contribué à répandre un nouveau lustre sur notre ville. »

Almanak ten dienste der zeelieden. Almanach à l'usage des marins; in-8°, à la Haye, Imprimerie de l'État.

La rédaction de ce recueil remonte à l'année 1787; elle est confiée à une commission de trois membres qui sont chargés encore des examens des officiers de marine, de la révision des cartes hydrographiques, et de tout ce qui concerne en général la détermination des longitudes en mer. Cette commission fut composée à sa naissance, de MM. *Van Swinden*, *Nieuwland* et *Van Keulen*. Après la mort de *Nieuwland* et la nomination de *Van Swinden* aux fonctions de directeur de la République Batave, MM. *Floryn* et *Van Bemmelen* furent appelés à faire partie de la commission dont les travaux furent suspendus quelque temps après. Lors de l'organisation du royaume des Pays-Bas en 1815, la commission fut rétablie et composée de MM. *Floryn, Schrœder* et *Van Bemmelen;* elle se compose aujourd'hui de MM. *Schrœder*, *Moll* et *Van Hynsbergen*. L'almanach qu'elle publie annuellement comprend, comme la *connaissance des temps* en France et le *nautical Almanac* des Anglais, tout ce qui concerne les mouvemens du soleil, de la lune, des planètes et des satellites de Jupiter. Chaque volume contient en outre des notices scientifiques recueillies et mises en ordre par M. *Schrœder*, président de la commission et professeur à l'Université d'Utrecht. Ces notices, dont plusieurs sont dues aux officiers de la marine royale, présentent en général beaucoup d'intérêt et traitent de différens points importans de la science. Elles seront consultées avec fruit par ceux qui voudront approfondir la connaissance de nos côtes ou obtenir de nouveaux documens sur les mers explorées par nos vaisseaux.

Les commissaires qui furent chargés de la rédaction du premier *almanach à l'usage des marins*, avaient décidé qu'on pren-

drait, pour premier méridien, le méridien du pic de Ténérif et que les nombres des tables seraient puisés dans le *nautical Almanac*, après avoir subi la correction nécessitée par la différence entre les longitudes du Pic et de Greenwich. Par une décision du ministère de la marine, la commission en publiant son recueil pour 1828 a, comme les Anglais, adopté pour point de départ le méridien de Greenwich, de sorte que les nombres du *nautical* peuvent être employés sans modifications par nos marins.

Compendio de matématicas puras y mistas. Manuel de mathématiques pures et mixtes; par D. José Mariano Vallejo; 2e édit. 2 vol. in-8°. Paris, chez Bossange, 1826.

Cet ouvrage a pour but d'exposer dans un cadre resserré les différentes branches des mathématiques pures et appliquées, de manière qu'on puisse saisir d'un coup-d'œil tout ce qui est actuellement du domaine des sciences exactes. Cette idée nous a paru neuve, et le plan de l'ouvrage susceptible d'intéresser nos lecteurs.

Le premier volume traite successivement de l'arithmétique, de l'algèbre, de la géométrie, de la trigonométrie rectiligne et sphérique, ainsi que de la géométrie pratique. Le second volume comprend l'application de l'algèbre à la géométrie, les sections coniques, les fonctions et les séries, le calcul différentiel et intégral, les nouveaux calculs analogues au calcul infinitésimal, les différentes parties de la mécanique, la mécanique industrielle, des résumés succincts de l'affinitologie, de la cristallographie, des différentes branches de la physique, de la météorologie, de l'astronomie ainsi que de la théorie des probabilités. On conçoit que l'auteur, en restant dans les limites qu'il s'est fixées, n'a pu entrer dans des détails bien étendus surtout pour ce qui concerne les sciences appliquées. Il nous a paru en général que son ouvrage peut être fort utile aux personnes qui, n'ayant pas le temps d'approfondir les sciences mathématiques, veulent cependant acquérir des notions dans les parties qui sont le plus à leur portée.

M. *Vallejo* a le mérite d'exposer clairement ses idées et de présenter les sujets qu'il traite sous un point de vue intéressant. Il était du reste avantageusement connu depuis long-temps par la publication d'un grand nombre d'ouvrages espagnols sur les sciences, et particulièrement par un cours complet de mathématiques en 4 volumes in-4°, qui ont été imprimés en Espagne, et adoptés pour l'instruction publique dans ce royaume. L'auteur a essayé de ramener la géométrie aux méthodes rigoureuses des anciens. La manière dont il détermine la surface d'un cercle, d'un cylindre, d'un cône, etc., mérite une attention particulière; il a aussi traité d'une manière qui lui est propre, tout ce qui se rapporte à la théorie des parallèles. Il nous a paru en général que M. *Vallejo* est très au courant de ce qui a été publié dans les différens pays sur les sciences mathématiques, et qu'il a fait un utile emploi de ses connaissances; nous avons été surpris néanmoins de voir que la géométrie descriptive et en général la géométrie de l'espace dont on s'est tant occupé dans les derniers temps, n'ait pas trouvé place dans ses ouvrages.

Correspondance et nouvelles scientifiques.

L'Académie royale des sciences et belles-lettres de Bruxelles, dans sa séance générale du 7 mai dernier, a décerné une médaille d'or à M. A. *Timmermans*, professeur à l'Athénée royal de Tournay, pour sa réponse à la question *de la forme la plus avantageuse à donner aux ailes des moulins*. Plusieurs autres mémoires avaient été envoyés au concours, sur divers points scientifiques.

Dans la même séance, l'Académie a reçu au nombre de ses membres M. le docteur *Blume*, directeur de l'herbier du Royaume et auteur de la Flore de Java; ainsi que M. *Dumortier Ruteau* de Tournai, auteur de plusieurs ouvrages importans sur la botanique. L'Académie a en même temps arrêté son programme pour 1830. Voici les questions mathématiques qui ont eté mises au concours.

Pour 1830 *on demande de démontrer, par rapport aux sur-*

faces du deuxième degré, les analogues des théorèmes de Pascal *et de* Brianchon.

Donner la théorie mathématique de l'homme et des animaux, considérés comme moteurs et machines.

Les concurrens sont prévenus qu'ils doivent rapporter les mesures des forces à l'unité connue sous le nom de *dyname.*

Comparer, pour les Pays-Bas, les avantages qui résulteraient de l'établissement des chemins en fer avec ceux qu'offrent les canaux.

On demande *un examen philosophique des différentes méthodes employées dans la géométrie récente, et particulièrement de la méthode des polaires réciproques.*

Pour 1831, on demande *la théorie mathématique des vibrations intestines des corps élastiques, en ayant égard aux circonstances physiques qui atténuent d'abord et qui finissent par détruire le mouvement primitif.*

Les réponses doivent être envoyées, port franc, chez M. *Dewez* secrétaire, avant le 1er février. Le prix est une médaille d'or de la valeur de 30 ducats.

— On a dit que dans la dernière session des États-Généraux, quelques membres de l'une des sections ont demandé, dans des vues économiques, la suppression de l'Académie royale de Bruxelles. Voici ce qu'on lit à cet égard dans les rapports des sections (un membre demande la suppression au budget de l'Académie de Bruxelles, d'autres l'explication de son utilité). Le ministère a répondu « On a insisté sur la suppression de l'Académie royale de Bruxelles, tandis que d'un autre côté on a demandé des renseignemens sur l'utilité de cet établissement. A l'égard de l'utilité, on peut renvoyer aux publications annuelles des *Mémoires* de cette Académie, lesquels peuvent servir en même temps de preuve de l'intérêt qui est attaché à une existence durable de ce corps. » Les honorables membres pourront trouver encore une réponse à leur demande dans le *rapport sur les travaux de l'Institut de France,* pour 1826 (1); où il est aussi question de l'Académie de Bruxelles.

---

(1) L'Académie royale de Bruxelles reçoit annuellement de l'état 4000 flo-

— On a dit encore que des membres ont désiré de voir disparaître du budget annal les 6000 florins qui ont été alloués pour l'espace de six ans au musée de Bruxelles. On sait que les professeurs reçoivent annuellement sur cette somme, 500 florins qui leur ont été présentés, à titre d'*indemnité*, lorsque le gouvernement, dans des termes pleins de délicatesse, les a invités à se charger de donner des cours publics.

— Nous venons de recevoir la dissertation de M. *Plateau*, *sur quelques propriétés des impressions produites par la lumière sur l'organe de la vue;* plusieurs fragmens de cet intéressant travail ont déjà paru dans la *Correspondance*, et le numéro actuel présente encore le résumé des recherches qui y sont exposées. La dissertation est écrite en français; cette innovation mérite d'être remarquée; et nous nous rangeons volontiers du nombre de ceux qui félicitent l'université de Liége de l'avoir autorisée.

Nous dirions tout le bien que nous pensons du travail de M. *Plateau*, si la dédicace n'était de nature à rendre nos suffrages peut-être suspects.

— Il vient de paraître à Londres (31 mars), un rapport imprimé par ordre de la maison des communes, et rédigé par M. *J. Finlaison*, secrétaire pour la dette nationale, sur l'évidence et les faits élémentaires qui servent de base aux tables d'assurances sur la vie (*on the evidence and elementary facts on which the tables of life annuities are founded*). Ce rapport a été suivi d'un *bill* qui établit le mode des assurances pour la réduction de la dette nationale. On ne saurait trop admirer la prudence anglaise dans les règlemens qui tiennent aux grands intérêts de la nation et dans le soin qu'on prend de s'entourer de toutes les lumières possibles. Dans plusieurs états de l'Europe, les sociétés d'assurances

---

rins, dont 1500 sont alloués au secrétaire à titre de traitement. Le reste de la somme sert à l'impression des mémoires, à l'acquisition des médailles d'or pour les concours et des jetons de présence pour les membres : chaque jeton a une valeur intrinsèque de 2 florins. L'Académie depuis sa réorganisation a fait paraître 5 volumes in-4° de mémoires de ses membres et 6 volumes de mémoires couronnés.

sont loin de s'occuper d'examens aussi consciencieux ; aussi les fortunes des particuliers ne sont pas toujours à l'abri des revers qu'amènent des spéculations imprudentes ou des calculs mal établis. M. *Finlaison* a particulièrement insisté dans son rapport sur la distinction à établir entre la mortalité des hommes et des femmes, distinction qui n'est pas encore adoptée par les sociétés d'assurances, mais qu'il met dans la plus grande évidence en faisant usage de différentes tables de mortalité. Ainsi, il trouve que si l'existence de dix enfans mâles est représentée par 100,000, celle de dix filles le sera par 109,079, en Hollande, d'après les anciennes tables de *Kersseboom;* par 111,831, à Chester, d'après le docteur *Price;* par 107,031, à Montpellier; par 105,279 en Suède; par 112,05, à Amsterdam, et par 103,764, à Bruxelles. Il a déduit ces deux derniers nombres des tables de mortalité que j'ai données dans mes *Recherches sur la population*, etc. De sorte que la mortalité moins grande pour les femmes, se trouve établie, comme l'observe l'auteur, par toutes les tables où jusqu'à présent on ait fait la distinction des sexes. Cependant, poursuit-il, l'Angleterre, pour qui cette distinction est si importante, l'a constamment négligée jusqu'à ce jour.

— Nous lisons dans la *Récompense*, journal du jeune âge, qui s'imprime à Liége, et qui mérite d'être recommandé à tous les pères de famille : « Le bateau traîné par 3 chevaux faisait *cinq* lieues en 10 heures, c'est-à-dire une *demi-lieue* par heure. Le bateau à vapeur faisait *vingt* lieues en 5 heures, c'est-à-dire *quatre lieues* par heure. Ce dernier bateau allait donc huit fois plus vite que le premier. La machine à vapeur avait donc une force huit fois plus grande que celle des 3 chevaux, c'est-à-dire une force de 24 chevaux. » Ce rapport n'est pas exact; il faudrait dire que, toutes les autres circonstances étant les mêmes, les forces des machines à vapeur sont dans le rapport de 1 à 64, comme les *carrés* des vitesses des deux bateaux. Nous devons ajouter que de pareilles erreurs se présentent rarement dans la *Récompense;* nous n'oserions en dire autant de plusieurs de nos autres journaux.

— Nous avons reçu un mémoire de M. *Du Boisaymé*, *sur la courbe que décrit un chien en courant après son maître*. La plupart de nos lecteurs se rappelleront sans doute les détails de ce problème curieux, qui déjà ont été insérés dans le deuxième vol. de la *Correspondance sur l'École Polytechnique*. Le cas le plus simple est celui où le maître se meut en ligne droite : en supposant que le mouvement se fasse uniformément le long de l'axe des x; en nommant n le rapport de deux vitesses et C et D deux constantes arbitraires qui dépendent de l'état initial, l'équation de la courbe parcourue par le chien, est

$$y = \frac{1}{2}\left(\frac{n}{n+1} C x^{\frac{n+1}{n}} - \frac{n}{n-1} \frac{1}{C} x^{\frac{n-1}{n}}\right) + D.$$

On prévoit que la tangente à la courbe passe toujours par le point de l'axe des x où se trouve le maître; et que la courbe est rectifiable puisque le rapport des chemins parcourus des deux parts est toujours n. L'auteur a discuté avec soin ce qui concerne les ordonnées *maxima* et *minima*, le centre de figure, les rayons de courbure, etc.; il examine aussi le cas où le maître parcourrait une autre ligne que la droite. Nous ne voulons point préjuger sur l'utilité dont peuvent être de pareilles recherches; l'histoire des sciences ne nous montre que trop d'exemples de questions qui avaient paru d'abord stériles et qui ont ensuite obtenu les applications les plus heureuses.

— La société typographique de Rome vient de faire paraître une traduction italienne de l'*Astronomie populaire*, opuscule que nous avons publié à Bruxelles, il y a deux ans; et que nous ne supposions pas devoir passer un jour sous les ciseaux de la censure romaine. Le chapitre des comètes a été un peu écorné; et quelques phrases ont été remplacées par des lignes de points. Le traducteur, M. *Ghirelli*, a enrichi l'ouvrage de notices historiques.

— M. *De Reiffenberg*, professeur à l'université de Louvain, a bien voulu nous adresser un supplément à la notice sur

les prix des grains pendant les trois siècles précédens. (Voyez pag. 74, tom. V). Les nombres qu'il donne sont extraits d'un manuscrit de feu M. *Gérard*, et ont été recueillis pour les quartiers de Gand, Bruges et Rupelmonde. Le *heud* est la mesure et forme le huitième du muid; les prix sont en argent parisis, et sont les moyennes de trois en trois ans à partir de 1384 jusqu'en 1404.

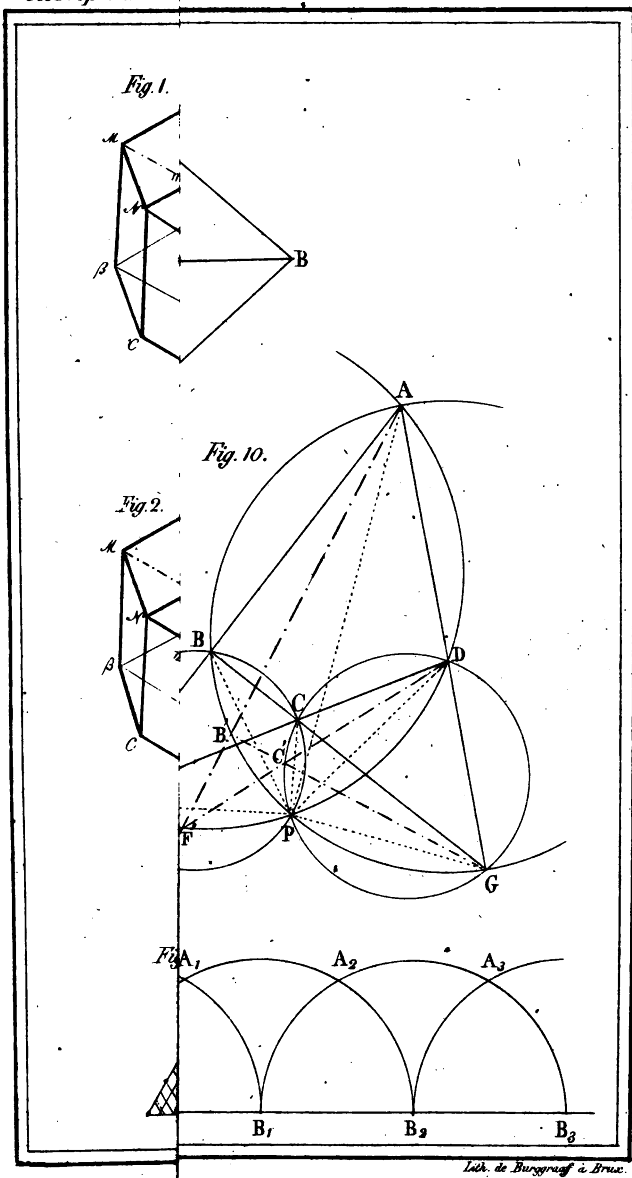
	Heud de froment.			H. d'avoine dure.			H. d'avoine molle.		
1384. .	46 sols	2 den.	1 obole.	24	4	»	16	2	1
1387. .	50	10	1	20	11	1	15	3	»
1390. .	44	8	»	19	7	1	11	6	1
1393. .	26	3	»	17	4	»	10	»	»
1396. .	36	2	1	18	2	»	11	5	»
1399. .	36	1	»	17	4	1	10	7	1
1402. .	45	»	1	14	10	1	9	3	1
MOYENNES	40	9	»	18	11	1	12	»	1

Le prix moyen de l'avoine, sans distinction, a donc été de 15 sols 6 den. pour la fin du 14e siècle; et ce prix est à celui du froment comme 0,38 est à 1, exactement comme nous l'avons trouvé pour les 16e, 17e, 18e et 19e siècles.

— Les sciences ont fait une nouvelle perte dans la personne du docteur *Young*, l'un des physiciens les plus distingués que l'Angleterre ait eus dans les derniers temps. Le docteur *Young* n'avait pas seulement des connaissances très-étendues dans les sciences physiques et mathématiques, il était encore très-versé dans les sciences médicales, et peut être regardé comme un des savans qui se sont le plus distingués par leur érudition et leur sagacité pour déchiffrer les caractères hiéroglyphiques des Égyptiens. Il possédait à un haut degré l'aptitude à se livrer à des études en apparence très-opposées, et parlait avec facilité la plupart des langues modernes.

QUESTION.

Déterminer le nombre de boulets qui entrent dans une pile dont la base est formée par un hexagone. (M. *De Behr.*)



Lith. de Burggraaf à Brux.

Premier Mémoire sur la transformation des relations métriques des figures (1); par M. CHASLES, ancien élève de l'École Polytechnique, correspondant de l'Académie Royale de Bruxelles.

TRANSFORMATION DES RELATIONS MÉTRIQUES DES FIGURES.

On fait journellement usage maintenant de la théorie des *polaires réciproques*, pour transformer les figures en d'autres figures, jouissant de propriétés différentes de celles des premières figures; et ces propriétés, en tant qu'on ne considère que les relations *descriptives* ou de *situation*, se déduisent les unes des autres par quelques règles générales extrêmement simples.

M. *Poncelet* a en outre fait voir comment cette méthode des polaires réciproques peut servir aussi à transformer toutes relations métriques d'angles, et les relations métriques de longueur, qui sont de la nature de celles qui se présentent dans la théorie des transversales.

Cette double extension ajoute à l'importance du rôle que joue depuis quelques années, dans l'étude des propriétés de l'étendue, la théorie des polaires réciproques.

Mais il n'a pas encore été remarqué, je crois, que, en ce qui concerne les relations métriques de longueur, cette théorie peut conduire à un principe de transformation beaucoup plus général que celui qui est relatif aux relations métriques de la nature de celles qui se présentent dans la théorie des transver-

---

(1) Ce Mémoire a été adressé le 7 mars dernier à l'Académie Royale de Bruxelles, qui en a ordonné l'insertion dans le Recueil de ses Mémoires.

sales; c'est-à-dire, qu'il est un genre fort étendu de relations métriques, et dont celles qui se présentent dans la théorie des transversales ne sont qu'un cas particulier, que l'on peut transformer par la théorie des polaires réciproques.

Nous nous proposons d'exposer les principes de transformation de ce genre de relations métriques, et quelques applications de ces principes qui nous conduiront à des propriétés tout-à-fait nouvelles des lignes et des surfaces courbes.

Ainsi que nous l'avons déjà dit (*Annales de Mathématiques*, tom. XVIII, p. 270), cette faculté de conduire à des moyens de transformer les figures, n'est point un privilége exclusif de la théorie des polaires réciproques; il existe d'autres modes de transformation, qui sont même d'une grande simplicité. Mais comme nous avons pour but unique aujourd'hui la transformation, par quelque moyen que ce soit, d'un certain genre de relations métriques de longueur, nous adoptons la méthode qui résulte de la théorie des polaires réciproques, parce qu'elle nous offre pour le moment l'avantage de pouvoir être exposée en peu de mots, puisqu'on est familiarisé avec cette théorie.

Nous prendrons pour conique *auxiliaire* ou *directrice*, dans la transformation des figures planes, une *parabole*; et pour surface *auxiliaire* ou *directrice*, dans la transformation des figures à trois dimensions, un *paraboloïde*. Par cette raison, et pour ne pas répéter à chaque fois que nous nous servons d'une parabole ou d'un paraboloïde, pour courbe ou surface *auxiliaire*, nous appellerons ce genre de transformation *parabolique*.

Nous diviserons ce Mémoire en deux parties, l'une pour les figures planes, et l'autre pour les figures à trois dimensions.

PREMIÈRE PARTIE.

TRANSFORMATION PARABOLIQUE DES FIGURES PLANES.

I.

(1) Rappelons d'abord que :

1° « La polaire d'un point situé à l'infini, prise par rapport » à une parabole, est toujours parallèle à l'axe de cette courbe ;

2° » Les pôles de plusieurs droites parallèles entre elles, » sont sur un même diamètre de la parabole, c'est-à-dire, sur » une droite parallèle à son axe ;

3° » Toute droite située à l'infini a pour pôle le point situé à » l'infini à l'extrémité de l'axe de la parabole. »

(2) Notre principe de transformation des relations métriques des figures planes repose sur le théorème suivant :

Les polaires de deux points quelconques, prises par rapport à une parabole, interceptent sur l'axe de cette courbe un segment qui est égal en longueur à la projection orthogonale sur cet axe de la droite qui joint les deux points.

En effet par les deux points menons deux droites perpendiculaires à l'axe de la parabole, les polaires des deux points passeront respectivement par les pôles de ces deux droites ; or, ces pôles sont, comme on sait, distans du sommet de la parabole des mêmes quantités que les deux droites elles-mêmes ; la distance de ces deux pôles est donc égale à la distance des deux droites ; or, cette distance des deux droites est précisément la projection orthogonale de la droite qui joint les deux points proposés ; les polaires de ces deux points passent par les deux pôles en question ; le théorème est donc démontré.

(3) D'après cela, soient A, B, C, D, E, etc., des points d'une figure plane, et F (AB, CD, EF, etc.) $= o$, une relation entre les distances de plusieurs de ces points.

Faisons la transformation parabolique, nous aurons une se-

conde figure; soient a, b, c, d, e, etc., les droites qui répondent dans cette seconde figure aux points A, B, C, D, E, etc., c'est-à-dire, les polaires de ces points; et soient α, β, γ, δ, ε, etc., les points où ces droites rencontrent l'axe de la parabole auxiliaire; on aura, en désignant cet axe par x;

$$\alpha\beta = \text{AB cos. (AB, X)},$$
$$\gamma\delta = \text{CD cos. (CD, X)},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

ce qui résulte du théorème que nous venons de démontrer; et la relation donnée entre les distances AB, CD, etc., devient celle-ci :

$$F\left(\frac{\alpha\beta}{\text{cos. (AB, X)}}, \frac{\gamma\delta}{\text{cos. (CD, X)}}, \frac{\varepsilon\varphi}{\text{cos. (EF, X)}}, \text{etc.}\right) = o.$$

Si cette équation est telle que les cosinus disparaissent d'eux-mêmes, il restera une relation relative à la seconde figure seulement, et qui exprimera une propriété générale de cette figure, correspondante à la propriété de la première figure qu'exprime la relation donnée entre les distances de ses points.

(4) Ainsi notre mode de transformation s'appliquera à toutes les relations métriques de distances, telles que, quand on y remplacera ces distances par ces distances divisées respectivement par les cosinus des angles que font leurs directions avec un axe fixe, tous les cosinus disparaîtront des équations; et alors on regardera dans ces équations chaque distance comme représentant le segment fait sur un axe fixe par les deux droites de la nouvelle figure, correspondantes aux extrémités de cette distance.

(5) Ce mode de transformation s'applique à un genre de relations métriques fort étendu.

Il est clair que ce genre comprend toutes les relations qui se présentent dans la théorie des transversales où une distance est toujours divisée par une autre distance comptée sur la même direction, ce qui fait que les cosinus disparaissent toujours.

Au lieu de faire l'énumération des relations auxquelles convient notre mode de transformation, nous allons l'appliquer à un certain nombre d'exemples variés, ce qui en fera mieux saisir l'esprit et l'usage que des raisonnemens théoriques ; et nous allons choisir ces exemples de manière à présenter des propriétés nouvelles, tant des coniques que des courbes géométriques en général.

Car c'est par l'usage et par la nature des résultats d'une méthode qu'on peut en apprécier la bonté et l'utilité.

II.

(6) On sait que, si par un point pris arbitrairement dans le plan d'une courbe géométrique on mène deux transversales parallèles à deux axes fixes, et qu'on fasse les produits des segmens interceptés sur chacune de ces transversales entre le point et la courbe, le rapport de ces produits sera constant quel que soit le point par lequel on aura mené les transversales ; ainsi soient M ce point et A, A′, A″... les points où la première transversale rencontre la courbe, B, B′, B″... ceux où la seconde transversale la rencontre ; et N un autre point quelconque, C, C′, C″... et D, D′, D″... les points où les deux transversales menées par ce point parallèlement aux premières rencontrent la courbe ; on aura

$$(1)\ldots\ \frac{\text{MA. MA}'\ldots.}{\text{MB. MB}'\ldots.}=\frac{\text{NC. NC}'\ldots}{\text{ND. ND}'\ldots}$$

Faisant la transformation parabolique, on aura une seconde courbe géométrique ; aux points A, A′... correspondront les tangentes a, a',... à cette courbe, issues d'un même point correspondant à la transversale MAA′ ; et comme cette transversale est toujours parallèle à un axe fixe, ce point correspondant se trouvera sur une droite fixe parallèle à l'axe de la parabole (1, 2°) : pareillement le point correspondant à la transversale MBB′ se trouvera sur une seconde droite fixe

parallèle à l'axe de la parabole; ces deux points seront donc les intersections de ces deux droites parallèles par une droite quelconque m correspondante au point M; soient $a, a', a''...$ et b, b', b'',... les tangentes menées de ces deux points à la courbe; ces tangentes correspondront aux points A, A', A''... et B, B', B'',... soient $\alpha, \alpha', \alpha''$,... β, β', β'',... et μ les points où l'axe de la parabole rencontre ces tangentes et la droite m; on aura (3)

$$\begin{aligned}
\mu\alpha &= \text{MA} \cos. (\text{MA}, \text{X}),\\
\mu\alpha' &= \text{MA}' \cos. (\text{MA}, \text{X}),\\
&\dots\dots\dots\dots\\
\mu\beta &= \text{MB} \cos. (\text{MB}, \text{X}),\\
\mu\beta' &= \text{MB}' \cos. (\text{MB}, \text{X}),\\
&\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}$$

Soient pareillement $\gamma, \gamma', \gamma'', \ldots, \delta, \delta', \delta''$,... et ν les points où l'axe de la parabole rencontre les droites qui correspondent dans la seconde figure aux points C, C', C'',... D, D', D''... et N; on aura

$$\begin{aligned}
\nu\gamma &= \text{NC} \cos. (\text{NC}, \text{X}),\\
\nu\gamma' &= \text{NC}' \cos. (\text{NC}, \text{X}),\\
&\dots\dots\dots\dots\\
\nu\delta &= \text{ND} \cos. (\text{ND}, \text{X}),\\
\nu\delta' &= \text{ND}' \cos (\text{ND}', \text{X}),\\
&\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}$$

Or, on a

$$\cos. (\text{MA}, \text{X}) = \cos. (\text{NC}, \text{X}) \text{ et } \cos. (\text{MB}, \text{X}) = \cos. (\text{ND}, \text{X}),$$

l'équation (1) devient donc

$$\frac{\mu\alpha . \mu\alpha' \ldots}{\mu\beta . \mu\beta' \ldots} = \frac{\nu\gamma . \nu\gamma' \ldots .}{\nu\delta . \nu\delta' \ldots .}$$

ce qui prouve que :

Si l'on a une courbe géométrique et trois droites fixes parallèles entre elles, que l'on tire arbitrairement une transversale,

et que par les points où elle rencontre les deux premières droites on mène deux faisceaux de tangentes à la courbe, et qu'on fasse les produits des segmens interceptés sur la troisième droite entre la transversale et les tangentes de chaque faisceau, le rapport de ces produits sera constant quelle que soit la transversale.

(7) Il faut observer que plusieurs des tangentes de chaque faisceau pourront être imaginaires; mais le produit des segmens compris sur une droite entre un point fixe de cette droite et ces tangentes sera toujours réel, de même que le produit des distances d'un point M d'une transversale aux points A, A', A''... où cette transversale rencontre une courbe géométrique est toujours réel, quoique plusieurs de ces points puissent être imaginaires.

Cette remarque nous servira pour tout ce qui va suivre.

III.

(8) Si trois coniques étant circonscrites à un quadrilatère, par chaque point M de la première on mène une transversale parallèle à un axe fixe, les produits des segmens interceptés entre ce points et chacune des deux autres courbes seront entre eux dans un rapport constant, quel que soit ce point M de la première conique (1); ainsi soient A, A' et B, B' les points où la transversale rencontre les deux courbes respectivement; on aura

$$(1)\ldots \frac{MA.\,MA'}{MB.\,MB'} = \text{const.}$$

quel que soit le point M sur la première conique.

Faisons la transformation parabolique, nous aurons trois coniques inscrites dans un même quadrilatère; à chaque trans-

(1) Cela sera démontré dans le premier n° du tom. 5 de la *Correspondance mathématique et physique* de M. Quetelet.

versale correspondra un point, et tous ces points seront sur une même droite parallèle à l'axe de la parabole, puisque toutes les transversales sont parallèles entre elles ; à chaque point M correspond une tangente m à la première de ces trois coniques, et aux points A, A' et B, B' correspondent des tangentes a, a' et b, b' aux deux autres coniques, toutes ces tangentes étant menées du point correspondant à la transversale ; soient μ, α, α', β, β' les points où ces cinq droites rencontrent l'axe de la parabole, on aura

$$\mu\alpha = \text{MA cos. (MA, X)}$$
$$\mu\alpha' = \text{MA' cos. (MA, X)}$$
$$\mu\beta = \text{MB cos. (MA, X)}$$
$$\mu\beta' = \text{MB' cos. (MA, X)}$$

l'équation (1) donne donc

$$(2)\ldots\ \frac{\mu\alpha.\ \mu\alpha'}{\mu\beta.\ \mu\beta'} = \text{const.}$$

ce qui prouve que :

Quand trois coniques sont inscrites dans un même quadrilatère, si par un point pris arbitrairement sur une droite fixe on mène une tangente à la première conique et deux tangentes à chacune des deux autres, et qu'on fasse les produits des segmens interceptés sur une seconde droite fixe parallèle à la première, entre la tangente à la première courbe et les tangentes à chacune des deux autres, le rapport de ces produits sera constant, quel que soit le point de la première droite fixe par lequel on aura mené les tangentes.

Ce théorème est susceptible de plusieurs conséquences.

(9) Par exemple, la droite sur laquelle se meut le point d'où l'on mène les tangentes peut être à l'infini, alors les cinq tangentes seront parallèles entre elles, mais leur direction commune variera. Soit une perpendiculaire à ces cinq tangentes, les segmens interceptés sur cette perpendiculaire entre ces tangentes seront proportionnels aux segmens $\mu\alpha$, $\mu\alpha'$, $\mu\beta$,

$\mu\mathcal{C}'$; on pourra donc mettre ces nouveaux segmens à la place de ceux-ci dans l'équation (2) ; alors le théorème prendra cet énoncé :

Quand trois coniques sont inscrites dans un quadrilatère, si on leur mène des tangentes parallèles entre elles et sous une direction quelconque, et qu'on fasse les produits des distances d'une tangente à la première conique aux tangentes à chacune des deux autres coniques respectivement, le rapport de ces produits sera constant, quelle que soit la direction commune de ces tangentes.

(10) Quand un quadrilatère est circonscrit à une conique, on peut considérer chacune de ses deux diagonales comme une conique inscrite dans le quadrilatère, toutes les tangentes à cette conique passeront par ses deux extrémités qui sont les sommets du quadrilatère ; on conclut donc du théorème précédent que :

Quand une conique est inscrite dans un quadrilatère, le produit des distances de chaque tangente à la conique à deux sommets opposés du quadrilatère est au produit des distances de la même tangente aux deux autres sommets dans un rapport constant, quelle que soit la tangente.

Ce théorème correspond, comme on voit, à cette propriété des coniques, connue des anciens et dont *Newton* s'est servi dans ses *Principes mathématiques de la philosophie naturelle :* « Une conique étant circonscrite à un quadrilatère, le pro-» duit des distances de chaque point de cette courbe à deux » côtés opposés du quadrilatère est au produit des distances » de ce point aux deux autres côtés dans un rapport constant. »

(11) On conclut du théorème (10) que :

Si une droite se meut dans le plan d'un quadrilatère, de manière que le produit de ses distances à deux sommets opposés du quadrilatère soit au produit de ses distances aux deux autres sommets dans un rapport constant, cette droite enveloppe une conique tangente aux quatre côtés du quadrilatère.

On pourrait tirer d'autres corollaires du théorème (8) ; mais cela nous éloignerait de notre but, qui est de donner des

exemples de la transformation parabolique des relations métriques, et non de discuter les théorèmes que nous obtenons.

(12) La propriété de trois coniques qui ont les mêmes points d'intersection, dont nous avons déduit le théorème (8), appartient à trois courbes géométriques quelconques qui ont, deux à deux, les mêmes points d'intersection; et, par suite, le théorème (8) s'applique généralement à trois courbes géométriques qui ont, deux à deux, les mêmes tangentes communes.

Les courbes géométriques jouissent de plusieurs autres propriétés générales qu'il est facile de transformer, mais comme ces propriétés et leurs analogues dans les surfaces géométriques, et même dans les courbes à double courbure, donnent lieu à un écrit de quelqu'étendue, nous en faisons le sujet d'autres Mémoires sur les transformations paraboliques.

IV.

(13) On sait que si un polygone d'un nombre pair de côtés est inscrit dans une conique, et que par chaque point de la courbe on mène une transversale parallèle à un axe fixe, et qu'on fasse le produit des segmens interceptés par cette transversale entre ce point et les côtés de rang pair, et le produit des segmens compris entre ce même point et les côtés de rang impair, le rapport de ces produits sera constant pour tous les points de la courbe (théorème dû à M. *Carnot*, voyez *Géométrie de position*, p. 450 et *Traité des propriétés projectives* de M. *Poncelet*, p. 313).

Il est clair que des raisonnemens tout-à-fait semblables à ceux que nous avons faits pour démontrer le théorème (8), conduiront du théorème que nous venons d'énoncer à celui-ci :

Si un polygone d'un nombre pair de côtés étant circonscrit à une conique, on mène d'un point quelconque, pris sur une droite fixe, une tangente à la conique et des rayons aux sommets du polygone, et qu'on fasse le produit des segmens compris sur une seconde droite fixe, parallèle à la première, entre la tangente à la conique et les rayons aboutissans aux sommets de

rang pair, et le produit des segmens compris entre la même tangente et les rayons aboutissans aux sommets de rang impair, le rapport de ces produits sera constant, quel que soit le point de la première droite fixe d'où l'on a mené la tangente et les rayons.

(14) Deux côtés consécutifs du polygone peuvent se confondre en un seul, alors on regardera le point de contact de ce côté comme un sommet du polygone. De cette manière on peut appliquer le théorème précédent à un polygone d'un nombre quelconque de côtés, pair ou impair; et en regardant le point de contact de chaque côté du polygone comme un sommet, on a cette propriété générale des polygones circonscrits aux coniques :

Si dans le plan d'une conique à laquelle est circonscrit un polygone quelconque, on tire deux droites fixes parallèles entre elles, et que par un point pris arbitrairement sur la première de ces droites on mène une tangente à la conique et des rayons aux sommets du polygone et aux points de contact de ses côtés, qu'on fasse le produit des segmens compris sur la seconde droite fixe entre la tangente à la conique et les rayons aboutissans aux sommets, et le produit des segmens compris entre la même tangente et les rayons aboutissans aux points de contact, le rapport de ces produits sera constant, quel que soit sur la première droite fixe le point d'où l'on a mené la tangente et les rayons.

(15) Si la première droite fixe dans ce théorème et le précédent est à l'infini, on peut, d'après ce que nous avons dit (9), leur donner ces énoncés :

Quand un polygone d'un nombre pair de côtés est circonscrit à une conique, le produit des distances d'une tangente à cette courbe aux sommets de rang pair, est au produit des distances de cette même tangente aux sommets de rang impair dans un rapport qui reste constant quand la tangente roule sur la conique.

Quand un polygone d'un nombre quelconque de côtés est circonscrit à une conique, si l'on fait le produit des distances de

ses sommets à une tangente à la courbe, et le produit des distances des points de contact de ses côtés à la même tangente, le rapport de ces deux produits sera toujours le même quelle que soit la tangente.

Ainsi, *quand un triangle est circonscrit à une conique, le produit des distances de ses trois sommets à une tangente quelconque à la conique, est au produit des distances des trois points de contact de ses côtés à la même tangente, dans un rapport constant, quelle que soit cette tangente.*

V.

(16) Soit une conique inscrite dans un quadrilatère ABCD, si on lui mène une tangente quelconque qui rencontre les côtés opposés AB, CD aux points M, N, nous avons démontré (*Correspondance Mathématique et Physique* de M. *Quetelet*, t. IV, p. 364), que, quelle que soit cette tangente, on a

$$(1)\ldots\ \frac{AM}{BM} = K\,\frac{DN}{CN}$$

K étant une constante.

Faisons la transformation parabolique, nous aurons une seconde conique à laquelle sera inscrit un quadrilatère dont les côtés a, b, c, d, correspondront aux sommets A, B, C, D; à la tangente à la première conique correspondra un point de la seconde conique, et aux points M, N, correspondront les droites m, n, menées de ce point aux points de rencontre des côtés a et b, et c et d. Soient μ et ν les points où l'axe de la parabole rencontre ces deux droites, et α, β, γ, δ les points où cet axe rencontre les côtés a, b, c, d; on aura

$$\begin{aligned}
\alpha\mu &= AM\ \cos.\ (AM, X),\\
\beta\mu &= BM\ \cos.\ (AM, X),\\
\gamma\nu &= CN\ \cos.\ (CN, X),\\
\delta\nu &= DN\ \cos.\ (CN, X);
\end{aligned}$$

on a donc, à cause de l'équation (1)

$$(2)\ldots\ \frac{\alpha\mu}{\delta\mu} = k\,\frac{\delta\nu}{\gamma\nu}.$$

ce qui prouve que :

Quand une conique est circonscrite à un quadrilatère, si l'on tire arbitrairement une transversale fixe, puis, que d'un point quelconque de la courbe, on mène deux rayons aboutissans à deux sommets opposés du quadrilatère, le rapport des segmens compris sur la transversale entre le premier rayon et les deux côtés de l'angle au sommet duquel est mené ce rayon, et le rapport des segmens compris sur la transversale entre le second rayon et les deux autres côtés du quadrilatère, seront entre eux dans une raison constante, quel que soit le point de la courbe d'où l'on a mené les deux rayons.

Cette propriété générale des coniques donne lieu à de nombreuses conséquences. Nous nous bornerons aux suivantes.

(17) On peut prendre pour transversale la diagonale du quadrilatère qui joint les deux sommets opposés auxquels on n'a pas mené les rayons; alors les deux points α, δ se confondront, les deux points β, γ, se confondront aussi, et l'équation (2) devient

$$\frac{\mu\alpha}{\mu\beta} = \mathrm{K}\frac{\nu\alpha}{\nu\beta};$$

le théorème alors peut s'énoncer plus simplement ainsi :

Si les côtés d'un angle variable inscrit dans une conique tournent autour de deux points fixes de la courbe, le rapport des segmens faits sur une corde fixe de la conique par le premier côté de l'angle, et le rapport des segmens faits sur la même corde par le second côté, seront entre eux dans une raison constante quelle que soit la position du sommet de l'angle sur la conique.

(18) Si cette raison est l'unité, on aura

$$\frac{\mu\alpha}{\mu\beta} = \frac{\nu\alpha}{\nu\beta}$$

ce qui fait voir que les deux points μ, ν sont conjugués harmoniques par rapport aux deux sommets α, ζ; par conséquent, les quatre droites menées de chaque point de la conique aux quatre sommets du quadrilatère forment un faisceau harmonique; on a donc cette propriété des coniques :

Si les droites menées d'un point d'une conique à quatre points de la courbe forment un faisceau harmonique, les quatre droites menées de tout autre point de la courbe aux quatre mêmes points formeront aussi un faisceau harmonique.

D'où l'on conclut que :

Étant donnés quatre points quelconques, si l'on demande de mener par ces points quatre droites concourant en un même point et formant un faisceau harmonique, le lieu géométrique du point de concours de ces droites sera une conique passant par les quatre points donnés.

(19) Par une nouvelle transformation parabolique, on voit sur-le-champ que ces deux théorèmes donnent lieu aux suivans :

Si quatre tangentes étant menées à une conique, une cinquième tangente rencontre ces quatre premières en quatre points formant une proportion harmonique, tout autre tangente à la conique rencontrera pareillement les quatre premières en quatre points formant une proportion harmonique.

Et

Étant données quatre droites fixes quelconques, si l'on demande une cinquième droite qui les rencontre en quatre points formant une proportion harmonique, l'enveloppe de cette cinquième droite sera une conique tangente aux quatre proposées.

VI.

(20) On sait que si aux extrémités d'un diamètre d'une conique on mène deux tangentes fixes, tout autre tangente les rencontrera en deux points, dont le produit des distances aux points de contact des deux tangentes fixes sera constant.

Faisons la transformation parabolique, nous aurons une

seconde conique ; aux deux tangentes fixes correspondront deux points de cette conique situés sur une parallèle à l'axe de la parabole auxiliaire; les tangentes en ces points correspondront aux deux points de contact des deux tangentes à la conique proposée; enfin à la troisième tangente à cette conique correspondra un point pris sur la seconde conique, et les droites menées de ce point aux deux premiers points fixes correspondront aux points d'intersection des deux tangentes fixes de la conique proposée par la troisième tangente; on conclut donc du théorème que nous venons d'énoncer que :

Si par deux points fixes pris sur une conique on mène les tangentes à cette courbe, et qu'on tire une transversale fixe parallèle à la droite qui joint les deux points, puis qu'autour de ces points on fasse tourner les côtés d'un angle de grandeur variable, inscrit dans la conique, les segmens compris sur la transversale respectivement entre chaque tangente et le côté de l'angle qui tourne autour de son point de contact, auront un produit constant.

VII.

(21) L'un des principes les plus usuels de la géométrie est celui de la proportionnalité des côtés dans deux triangles équiangles.

Soient deux triangles ABC, A'B'C', si leurs côtés sont parallèles deux à deux, on aura

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}=\frac{BC}{B'A'}.$$

Faisons la transformation parabolique, nous aurons deux nouveaux triangles, dont les sommets correspondront respectivement aux côtés des deux triangles proposés; ces sommets seront donc deux à deux sur trois droites parallèles à l'axe de la parabole (1. 2°); soient a, b, c et a', b', c' les côtés de ces nouveaux triangles correspondans aux sommets A, B, C et

A′, B′, C′ des premiers, et soient α, β, γ et α', β', γ' les points où l'axe de la parabole rencontre ces côtés, on aura

$$\alpha\beta = AB \cos. (AB, X),$$
$$\alpha'\beta' = A'B' \cos. (A'B', X);$$

et, comme AB et A′B′ sont parallèles, les deux cosinus sont égaux, et il en résulte

$$\frac{\alpha\beta}{\alpha'\beta'} = \frac{AB}{A'B'}.$$

On a pareillement

$$\frac{\alpha\gamma}{\alpha'\gamma'} = \frac{AC}{A'C'},\ \frac{\beta\gamma}{\beta'\gamma'} = \frac{BC}{B'C'};$$

on a donc

$$\frac{\alpha\beta}{\alpha'\beta'} = \frac{\alpha\gamma}{\alpha'\gamma'} = \frac{\beta\gamma}{\beta'\gamma'};$$

ce qui prouve que :

Quand deux triangles ont leurs sommets deux à deux sur trois droites parallèles entre elles, si l'on tire une transversale quelconque parallèle à ces droites, les segmens compris sur cette transversale entre les angles du premier triangle seront proportionnels aux segmens compris entre les angles du second triangle.

(22) Si deux des sommets d'un triangle se confondent avec les deux sommets correspondans du second triangle, le théorème prend cet énoncé :

Si le sommet d'un angle de grandeur variable, dont les deux côtés tournent autour de deux points fixes, se meut sur une droite, les segmens compris sur une transversale parallèle à cette droite entre la droite qui joint les deux points fixes et les deux côtés de l'angle, seront entre eux dans un rapport constant, quel que soit le sommet de l'angle sur la droite qu'il parcourt.

(23) On conclut immédiatement de là que :

Si d'un point pris sur une droite donnée on mène des rayons à trois points fixes situés en ligne droite, les segmens compris entre ces rayons, pris deux à deux, sur une transversale parallèle à la droite donnée, seront entre eux dans des rapports constans, quel que soit, sur la droite donnée, le point par lequel on a mené les rayons aux trois points fixes.

Cette proposition se déduit directement par une transformation parabolique de celle-ci : « Quand trois droites concourent » en un même point, les segmens qu'elles comprennent deux à » deux sur une transversale, sont entre eux comme les seg- » mens qu'elles comprennent sur une seconde transversale » parallèle à la première (1). »

L'usage que l'on fait du principe de la proportionnalité des côtés dans les triangles équiangles est si fréquent que l'on conçoit que les propositions que nous venons de déduire de ce principe pourront aussi être utiles.

(24) Pour en faire sur-le-champ une application, soient deux points A, B, et une transversale fixe MN; par un point m de cette droite, menons deux rayons aux points A, B, et un troisième rayon au point G′, milieu des deux points A′, B′, où ces deux premiers rayons rencontrent une seconde transversale parallèle à la première ; d'après le théorème précédent, ce troisième rayon mG′ rencontrera la droite AB en un point G, qui sera fixe quand le point m se mouvra sur la transversale MN.

Soit un troisième point quelconque C; menons le rayon mC qui rencontre la seconde transversale en un point C′; prenons sur cette transversale le point H′ tel que $G'H' = \frac{1}{3}\, G'C'$, la droite mH′ passera, d'après le même théorème, par un point H de la droite GC, qui sera fixe quel que soit le point m sur la

---

(1) Le théorème (23) peut se démontrer aisément sur la figure même, sans le secours des transformations paraboliques ; on peut même le généraliser et supposer que la droite donnée, sur laquelle se meut le point d'où l'on mène les rayons aux trois points fixes, tourne autour d'un point fixe de la droite qui joint ces trois points ; alors les rapports en question seront encore constans.

transversale MN; pareillement si on a un quatrième point D situé d'une manière quelconque par rapport aux trois premiers A, B, C, qu'on mène le rayon mD rencontrant la seconde transversale en D', et qu'on prenne par cette transversale le point I' tel que $H'I' = \frac{1}{4} I'D'$, le rayon mI' tournera autour d'un point fixe I de la droite HD quand le point m parcourra la transversale MN; or, les points G', H', I', sont les centres des moyennes distances, le premier des deux points A', B'; le second des trois points A', B', C'; le troisième des quatre points A', B', C', D'; on conclut donc de là ce théorème général :

Étant donnés des points situés arbitrairement dans un plan et une droite fixe, si d'un point pris par cette droite on mène des rayons à tous les points donnés, la droite menée de ce même point au centre des moyennes distances des points où ces rayons rencontrent une transversale parallèle à la droite fixe passera par un point fixe, quel que soit sur la droite donnée le point par lequel on a mené tous les rayons.

Si la droite fixe est à l'infini, ce théorème se réduit à ceci :

Si par des points donnés on mène des droites toutes parallèles entre elles, et qu'on prenne le centre des moyennes distances des points où elles rencontrent un axe de direction quelconque, la parallèle à ces droites menée par ce centre passera par un point fixe, quelle que soit la direction des parallèles.

On reconnaît la propriété du centre des moyennes distances d'un système de points placés d'une manière quelconque. Ainsi le théorème précédent est une généralisation de cette propriété du centre des moyennes distances d'un système de points. Ce théorème a déjà été donné par M. *Poncelet*, dans son Mémoire sur les centres des moyennes harmoniques (présenté à l'Académie des Sciences de Paris en mars 1824, et publié dans la troisième livraison du *Journal de Mathématiques* de M. *Crelle*, pour 1828).

VIII.

(25) Soit un système de points matériels A, B, C, disposés

d'une manière quelconque, soient m, m', m''... leurs masses, et O leur centre de gravité.

Faisons la transformation parabolique; aux points A, B, C,.... et O correspondront des droites a, b, c, ... et o.

Si par les points A, B, C,... et O, on mène des droites parallèles entre elles, et rencontrant l'axe de la parabole en des points A', B', C',... O', on aura, d'après la propriété du centre de gravité,

$$(1) \ldots\ldots m. O'A' + m' O'B' + m'' O'C' + \ldots = o;$$

c'est cette propriété que nous allons transporter dans la seconde figure.

Les parallèles menées par les points A, B, C, ... O, ont leurs points correspondans dans la seconde figure, situés respectivement sur les droites a, b, c, ... o, et tous sur une même droite parallèle à l'axe de la parabole; soient α, β, γ, ... ω ces points. Les deux points ω et α étant sur une parallèle à l'axe de la parabole, et leurs polaires rencontrant cet axe aux points O', A', on a $\omega\alpha = O'A'$; on a pareillement $\omega\beta = O'B'$, $\omega\gamma = O'C'$, ... et, par suite,

$$(2) \ldots\ldots m. \omega\alpha + m'. \omega\beta + m''. \omega\gamma + \ldots\ldots = o;$$

ce qui prouve que le point ω est le centre de gravité des points où la transversale rencontre les droites a, b, c, ..., ces points étant supposés avoir respectivement des masses m, m', m''....; l'équation (1) a lieu, quelle que soit la direction des parallèles menées par les points A, B, C, ... O; l'équation (2) a donc lieu, quelle que soit la transversale menée à travers les droites a, b, c, ... o, parallèlement à l'axe de la parabole; on a donc ce théorème :

Étant donné un système de droites dont tous les points supposés matériels ont des masses quelconques, mais constantes pour tous les points d'une même droite, si l'on tire une série de transversales parallèles entre elles, et qu'on prenne sur chacune

d'elles le centre de gravité des points matériels où elle rencontre les droites proposées, tous ces centres de gravité seront sur une même droite.

Ce théorème est, comme on voit, un cas particulier du principe de la conservation du mouvement du centre de gravité.

IX.

(26) On connaît plusieurs relations métriques relatives à l'hyperbole et à ses asymptotes, qui sont extrêmement simples, et que notre mode de transformation convertit immédiatement en des relations métriques appartenant à une conique quelconque.

Mais il faut observer dans la transformation parabolique d'une hyperbole, que chaque asymptote étant une tangente dont le point de contact se trouve à l'infini, à cette asymptote correspond dans la conique polaire de l'hyperbole un point de cette courbe, tel que la tangente en ce point est parallèle à l'axe de la parabole auxiliaire, puisque tout point situé à l'infini a sa polaire parallèle à l'axe de la parabole (11°). Ainsi aux deux asymptotes de l'hyperbole correspondent deux points de la conique polaire, tels que les tangentes en ces points sont parallèles à l'axe de la parabole; ces points sont conséquemment les extrémités du diamètre de cette courbe conjugué à l'axe de la parabole.

D'après cela on fera aisément les transformations suivantes.

X.

(27) Le produit des segmens interceptés sur les deux asymptotes d'une hyperbole entre leur point de rencontre et chaque tangente est constant; donc

Étant mené un diamètre d'une conique, et un axe fixe parallèle à son conjugué, si d'un point quelconque de la conique on tire deux rayons aboutissant aux extrémités du diamètre, le produit des segmens compris sur la transversale entre le diamètre

et ces deux rayons, demeurera constant, quand le point pris sur la conique changera de position.

(28) On peut prendre pour la transversale le conjugué du diamètre ; donc

Si le sommet d'un angle variable inscrit dans une conique parcourt la courbe pendant que ses côtés tournent autour des extrémités d'un diamètre, ces côtés rencontrent le conjugué de ce diamètre en deux points, dont le produit des distances au centre de la courbe sera constant.

XI.

(29) Si l'on tire une sécante dans l'hyperbole, ses parties comprises entre la courbe et les asymptotes seront égales ; donc

Si d'un point quelconque pris dans le plan d'une conique, on mène deux tangentes à la courbe et deux droites aboutissant aux extrémités d'un diamètre, le segment compris sur le diamètre conjugué entre l'une de ces droites et l'une des tangentes, sera égal au segment compris entre la seconde droite et la seconde tangente.

XII.

(30) Si par deux points fixes pris sur une hyperbole on mène deux droites à un troisième point quelconque de la courbe, le segment que ces deux droites intercepteront sur une asymptote sera de grandeur constante, quel que soit le troisième point de l'hyperbole (*Mémoire sur les lignes du second ordre*, par M. *Brianchon*, p. 56) ; donc

Deux tangentes à une conique étant fixes, si l'on mène une troisième tangente quelconque, et que d'un point fixe pris sur la conique, on tire deux droites aboutissant aux points où la troisième tangente rencontre les deux premières, le segment intercepté entre ces droites sur un axe fixe parallèle à la tangente à la courbe menée par le point fixe, sera de grandeur constante, quelle que soit la troisième tangente.

(31) La tangente mobile peut se confondre successivement avec les deux tangentes fixes ; il en résulte ce théorème :

Si d'un point d'une conique on mène deux droites aboutissant aux points de contact de deux tangentes à la conique, et une troisième droite aboutissant au point de concours de ces deux tangentes, ces trois droites rencontreront une transversale parallèle à la tangente à la conique menée par le point d'où émanent ces droites en trois points, dont le troisième sera le milieu des deux autres.

(32) Il est clair, d'après ce théorème, que :

Si un cône a pour base une section plane d'une surface du second degré et pour sommet un point de la surface, tout plan parallèle au plan tangent à la surface mené par ce sommet, coupera le cône, suivant une conique dont le centre sera le point où ce plan rencontrera la droite, menée du sommet du cône au sommet d'un second cône circonscrit à la surface, suivant sa section plane.

Ce théorème est la seconde propriété des projections stéréographiques que nous avons démontrée différemment ailleurs. (Voyez *Traité des Surfaces du second degré* de M. *Hachette*, p. 271 et *Annales de Mathématiques*, t. XVIII, p. 307.)

XIII.

(33) On sait que si, par chaque point d'une hyperbole, on mène une sécante parallèle à un axe fixe, le produit des segmens compris entre ce point et ceux où la sécante rencontre les deux asymptotes est constant ; on en conclut que :

Étant mené dans une conique un diamètre fixe, si d'un point pris arbitrairement sur une première transversale fixe parallèle au conjugué de ce diamètre, on mène une tangente à la conique et deux droites aboutissant aux extrémités du diamètre, le produit des segmens interceptés entre cette tangente et les deux droites sur une seconde transversale fixe, parallèle à la première, sera constant, quel que soit le point pris sur la première transversale.

(34) Cette première transversale peut être à l'infini, et on peut prendre pour la seconde le diamètre conjugué au premier diamètre ; alors on a ce théorème :

Si par les extrémités d'un diamètre d'une conique, on mène deux droites parallèles à une tangente quelconque, le produit des segmens interceptés sur le diamètre conjugué entre cette tangente et les deux droites sera constant, quelle que soit la tangente.

(35) Les distances de la tangente aux deux droites qui lui sont parallèles, sont égales aux segmens compris sur le diamètre conjugué entre la tangente et ces droites, multipliés par le sinus de l'angle que cette tangente fait avec ce diamètre ; d'où l'on conclut que :

Le produit des distances de chaque tangente à une conique aux extrémités d'un diamètre fixe, divisé par le carré du sinus de l'angle que cette tangente fait avec le conjugué du diamètre, est une quantité constante, quelle que soit la tangente.

(36) Considérant deux tangentes perpendiculaires entre elles, on conclut de ce théorème que :

Si l'on fait mouvoir un angle droit dont les côtés soient constamment tangens à une conique, et qu'on fasse le produit des distances de chaque côté de l'angle aux extrémités d'un diamètre fixe de la conique, la somme des valeurs inverses de ces deux produits sera une quantité constante, pour toutes les positions de l'angle mobile.

(37) Remarquons que dans le théorème (34), si par les deux extrémités du diamètre fixe on mène les tangentes à la conique, les distances de ces extrémités aux points où ces deux tangentes respectivement sont rencontrées par la tangente mobile, seront égales respectivement aux deux segmens interceptés sur le conjugué du diamètre; le produit de ces deux distances sera donc constant; ce qui exprime le théorème dont nous avons fait la transformation parabolique (20). Réciproquement le théorème que nous avons déduit de ce dernier conduit à la propriété de l'hyperbole que nous avons transformée au commencement de ce paragraphe. Il suffit pour cela

de supposer dans le théorème (20), que la conique est une hyperbole, et qu'on prend pour les deux points fixes les extrémités des deux asymptotes situées à l'infini.

XIV.

(38) On conçoit que tous les théorèmes que nous venons de déduire par la transformation parabolique de théorèmes connus, seraient susceptibles eux-mêmes d'une transformation parabolique; alors on obtiendrait de nouveaux théorèmes du même genre que ces théorèmes connus d'où nous sommes partis, mais qui seraient plus généraux qu'eux.

Par exemple, le théorème (29), par une transformation parabolique, donne celui-ci :

Un angle étant circonscrit à une conique, si l'on tire une sécante quelconque qui rencontre la conique en deux points, les segmens compris sur cette sécante, chacun entre un point de la conique et un côté de l'angle, seront tels que si deux angles s'appuient sur ces segmens et ont pour sommet commun un point quelconque de la corde qui joint les points de contact des deux côtés de l'angle circonscrit à la conique, ces deux angles intercepteront sur une transversale parallèle à cette corde deux segmens égaux.

Si la conique est une hyperbole et qu'on prenne pour les côtés de l'angle circonscrit les deux asymptotes, on en conclut que les segmens compris sur une sécante quelconque à l'hyperbole entre la courbe et les asymptotes sont égaux; ainsi le théorème que nous venons d'obtenir est une généralisation pour toute conique de la propriété de l'hyperbole.

(39) Le théorème (25), par une transformation parabolique, donne celui-ci :

Si l'on a un système de points matériels et une droite fixe, et que, par un point de cette droite, on mène des rayons à tous ces points et un dernier rayon aboutissant au centre de gravité des points, où une transversale parallèle à la droite fixe rencontre ces rayons, ces points étant supposés avoir les mêmes masses que les points proposés auxquels aboutissent les rayons,

le dernier rayon mené par ce centre de gravité passera par un point fixe, quel que soit le point de la droite proposée par lequel on a mené les rayons.

Ce théorème, qui donne, dans la supposition des masses égales, celui que nous avons démontré directement (24), se trouve dans le Mémoire de M. *Poncelet* sur les centres des moyennes harmoniques. M. *Poncelet* a en outre démontré cette propriété bien remarquable du point fixe en question : « La valeur in- » verse de la distance de ce point à la droite donnée, multi- » pliée par la somme des masses de tous les points du système, » est égale à la somme des produits des valeurs inverses des » distances de ces points à cette droite par les masses de ces » points respectivement. »

(40) Ces deux exemples suffisent pour faire voir comment tous les théorèmes auxquels nous avons appliqué la transformation parabolique, et particulièrement ceux qui sont relatifs à l'hyperbole, peuvent être généralisés.

Mais nous nous bornons à indiquer cette marche, parce qu'elle n'est pas la plus simple. Nous nous proposons d'en exposer une autre, par laquelle nous généraliserons immédiatement une foule de propriétés relatives aux relations métriques des figures (1).

Nous ferons voir aussi que les théorèmes que nous avons démontrés dans ce qui précède sont eux-mêmes des cas particuliers de théorèmes plus généraux que l'on obtient par une autre méthode pour la transformation des relations métriques. Nous avons jugé convenable de commencer par la transformation parabolique, parce qu'elle suffit pour conduire à des résultats qui nous ont paru offrir quelque intérêt.

---

(1) Nous avons déjà fait usage d'une double transformation polaire dans l'étude des propriétés des systèmes de coniques, pour démontrer certaines propriétés que nous aurions pu déduire immédiatement et sans transformation, des propriétés que nous admettions comme connues; mais nous préférions une marche uniforme. (Voyez *Annales de Mathématiques*, t. XVIII, p. 277.)

DEUXIÈME PARTIE.

TRANSFORMATION PARABOLIQUE DES FIGURES A TROIS DIMENSIONS.

XV.

(41) Rappelons d'abord que :

« 1° Le plan polaire d'un point situé à l'infini, pris par » rapport à un paraboloïde (elliptique ou hyperbolique), est » parallèle à l'axe du paraboloïde ;

» 2° Les polaires de plusieurs droites parallèles entre elles, » sont situées dans un même plan parallèle à l'axe du parabo- » loïde ;

» 3° Les pôles de plusieurs plans parallèles entre eux sont » sur une même droite parallèle à l'axe du paraboloïde ;

» 4° Toute droite située à l'infini a pour polaire une droite » parallèle à l'axe du paraboloïde ;

» 5° Enfin tout plan situé à l'infini a pour pôle le point situé » à l'infini à l'extrémité de l'axe du paraboloïde. »

(42) Notre principe de transformation des relations métriques des figures à trois dimensions repose sur le théorème suivant :

Les plans polaires de deux points, pris par rapport à un paraboloïde, interceptant sur l'axe du paraboloïde un segment égal en longueur à la projection orthogonale sur cet axe de la droite qui joint les deux points.

En effet, par les deux points menons deux plans perpendiculaires à l'axe du paraboloïde ; les plans polaires des deux points passeront respectivement par les pôles de ces deux plans ; or ces pôles sont sur l'axe du paraboloïde distans de son sommet des mêmes quantités que les deux plans eux-mêmes ; la distance de ces deux pôles est donc égale à la distance des deux plans ; mais cette distance des deux plans est précisément la projection orthogonale de la droite qui joint les deux points proposés sur l'axe du paraboloïde ; le théorème est donc démontré.

(43) D'après cela, soient A, B, C, D, E, etc., des points situés d'une manière quelconque dans l'espace, entre les distances AB, CD, EF, etc., desquels on a une relation :

$$(1) \ldots \; F\,(AB,\ CD,\ EF,\ \text{etc.}) = o.$$

Faisons la transformation polaire de la figure à laquelle appartiennent ces points, en prenant un paraboloïde pour surface auxiliaire; soient a, b, c, d, e, ... les plans qui, dans la nouvelle figure, correspondent aux points A, B, C, D, E, etc., et soient α, β, γ, δ, ε, etc., les points où ces plans rencontrent l'axe du paraboloïde, on aura, d'après le théorème que nous venons de démontrer, en désignant par χ l'axe du paraboloïde,

$$\alpha\beta = AB \cos.\ (AB,\ X)$$
$$\gamma\delta = CD \cos.\ (CD,\ X)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

et la relation entre les distances AB, CD, etc., donne celle-ci :

$$F\left(\frac{\alpha\beta}{\cos.\,(AB,X)},\ \frac{\gamma\beta}{\cos.\,(CD,\,X)},\ \text{etc.}\right) = o.$$

Si cette équation est telle que les cosinus disparaissent d'eux-mêmes, il restera une relation entre des distances appartenant à la seconde figure seulement, et qui exprimera une propriété générale de cette figure, correspondant à la propriété de la première figure exprimée par la relation (1).

Ainsi notre mode de transformation s'applique à toutes les relations métriques de distances, telles que si on y remplace ces distances par ces distances divisées par les cosinus des angles qui font avec un axe fixe les droites sur lesquelles elles sont comptées, tous les cosinus disparaissent de ces relations.

Faisons des applications de cette méthode de transformation.

Commençons par les relations métriques appartenant à la théorie des transversales.

XVI.

(44) On sait que si l'on a un quadrilatère gauche ABCD. et qu'on mène un plan transversal qui rencontre ses quatre côtés AB, BC, CD, DA, aux points M, P, N, Q, on aura :

$$\frac{AM.\ BP.\ CN.\ DQ}{BM.\ CP.\ DN.\ AQ} = 1.$$

Faisant la transformation parabolique, nous aurons un nouveau quadrilatère et un point fixe correspondant au plan transversal; soient a, b, c, d, les plans des quatre angles de ce quadrilatère, et m, p, n, q, les plans menés par ses arêtes et par le point fixe; ces plans correspondront aux points M, P, N, Q, respectivement; soient enfin α, β, γ, δ, μ, π, ν, $\varkappa$, les points où l'axe du paraboloïde rencontre ces plans, on aura

$$\alpha\mu = AM \cos. (AM,X)$$
$$\beta\mu = BM \cos. (BM,X)$$
. . . .

$$\cos. (AM, X) = \cos. (BM, X), \text{ etc.},$$

on a donc la relation

$$\frac{\alpha\mu.\ \beta\pi.\ \gamma\nu.\ \delta\varkappa}{\beta\mu.\ \gamma\pi.\ \delta\nu.\ \alpha\varkappa} = 1,$$

qui appartient au second quadrilatère. On parviendrait à une équation semblable pour un polygone d'un nombre quelconque de côtés, parce que le théorème sur le quadrilatère gauche d'où nous sommes partis appartient à un polygone quelconque; on a donc ce théorème :

Si par un point fixe et par les côtés d'un polygone gauche quelconque on mène des plans, et qu'on tire une transversale arbitraire, les segmens interceptés entre chacun de ces plans

et les deux faces de l'angle dièdre (1) *du polygone qui a pour arête le côté par lequel est mené ce plan, seront tels que le produit de tous ces segmens qui n'ont pas d'extrémité commune sera égal au produit de tous les autres.*

On peut voir, et nous ne nous arrêterons pas à le démontrer, que cette relation est telle qu'aux segmens on peut substituer les sinus des angles des plans qui comprennent ces segmens, de sorte qu'on peut énoncer le théorème ainsi :

Si par un point fixe on mène des plans passant respectivement par les côtés d'un polygone gauche, chacun de ces plans divisera en deux l'angle dièdre du polygone qui a pour arête le côté par lequel est mené ce plan, de sorte que l'on aura de nouveaux angles dièdres en nombre double de celui des angles dièdres du polygone ; le produit des sinus de ceux de ces angles dièdres qui n'ont pas de face commune, est égal au produit des sinus de tous les autres.

XVII.

(45) On sait que si les côtés AB, BC,... d'un polygone gauche sont tous tangens à une surface du second degré en des points M, N, P,... on a

$$(1)\ldots\ \frac{AM.\ BN.\ CP....}{BM.\ CN.\ DP....} = 1.$$

La transformation parabolique donnera une seconde surface du second degré, et un polygone dont tous les côtés seront tangens à cette surface ; soient a, b, c,... les plans correspondans aux sommets A, B, C,..., ce sont les plans des angles du nouveau polygone ; soient m, n, p,... les plans correspondans aux points M, N, P,... de la première surface, ce

(1) Nous appelons *angle-plan*, ou simplement *angle* d'un polygone gauche, l'angle formé par deux côtés consécutifs, et *angle dièdre*, l'angle formé par les plans de deux angles plans consécutifs.

sont les plans tangens à la seconde surface menés par les côtés du second polygone; soient enfin α, β, γ,... μ, ν, π,... les points où tous ces plans rencontrent l'axe du paraboloïde, on aura

$$\alpha\mu = \text{AM cos. (AM, X)}$$
$$\beta\mu = \text{BM cos. (BM, X)}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\text{cos. (AM, X)} = \text{cos. (BM, X), etc.,}$$

et l'équation (1) donne

$$\frac{\alpha\mu.\ \beta\nu.\ \gamma\pi....}{\beta\mu.\ \gamma\nu.\ \delta\pi....} = 1;$$

c'est-à-dire, que :

Si les côtés d'un polygone gauche étant tous tangens à une surface du second degré, on mène par leurs points de contact des plans tangens à la surface, chaque plan divisera en deux l'angle dièdre du polygone qui a pour arête le côté par lequel ce plan tangent est mené, et l'on aura de nouveaux angles dièdres en nombre double de celui des angles du polygone; ces nouveaux angles dièdres intercepteront sur une transversale quelconque des segmens, tels que le produit de ceux qui n'auront pas d'extrémité commune, sera égal au produit de tous les autres.

On pourrait, comme dans le théorème précédent, substituer aux segmens les sinus des angles dièdres qui les comprennent.

XVIII.

(46) Occupons-nous maintenant de la transformation de relations métriques, autres que celles qui se présentent dans la théorie des transversales.

Soit un polygone gauche ABCD..., on sait que la somme algébrique des projections de ses côtés sur un axe X est égale à zéro; on aura donc

$$\text{AB cos. (AB, X)} + \text{BC cos. (BC, X)} + \text{etc.} = o.$$

Faisons la transformation parabolique en prenant l'axe X pour celui du paraboloïde ; on aura un nouveau polygone ; soient a, b, c, d... les plans de ses angles correspondant aux sommets A, B, C, D, ... du premier ; et α, β, γ, δ, ... les points où ces plans rencontrent l'axe X, on aura

$$\alpha\beta = \text{AB} \cos. (\text{AB}, \text{X})$$
$$\beta\gamma = \text{BC} \cos. (\text{BC}, \text{X})$$
$$\dots\dots\dots\dots$$

L'équation ci-dessus devient donc

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\delta + \dots = o\,;$$

ce qui prouve que :

Si l'on a un polygone gauche et qu'on tire une transversale quelconque, la somme algébrique des segmens compris sur cette transversale entre les angles dièdres du polygone, sera égale à zéro.

Ce théorème peut être utile en géométrie, nous aurons occasion d'en faire usage.

XIX.

(47) Soit une surface du second degré U, o son centre et OA, OB, OC, trois demi-diamètres conjugués ; une transformation parabolique donnera une seconde surface du second degré u ; au centre o de la surface U correspondra le plan diamétral de la surface u, conjugué au diamètre de cette surface parallèle à l'axe du paraboloïde auxiliaire ; soit o ce plan diamétral ; aux trois diamètres conjugués OA, OB, OC correspondront trois droites situées dans ce plan diamétral, telles que la polaire de l'une d'elles, par rapport à la surface u, passera par le point d'intersection des deux autres ; et enfin aux trois points A, B, C, correspondront trois plans tangens à la surface u, menés par ces trois droites respectivement ; soient a, b, c, ces trois plans :

soient α, β, γ, ω, les points où l'axe du paraboloïde rencontre les quatre plans a, b, c, o, on aura

$$\omega\alpha = \text{OA} \cos. (\text{OA}, \text{X}),$$
$$\omega\beta = \text{OB} \cos. (\text{OB}, \text{X}),$$
$$\omega\gamma = \text{OC} \cos. (\text{OC}, \text{X}).$$

Or, on sait que la somme des carrés des projections des trois diamètres conjugués OA, OB, OC par l'axe X, est constante, quels que soient ces trois diamètres conjugués, c'est-à-dire, qu'on a

$$\overline{\text{OA}}^2 \cos.^2(\text{OA},\text{X}) + \overline{\text{OB}}^2 \cos.^2(\text{OB},\text{X}) + \overline{\text{OC}}^2 \cos.^2(\text{OC},\text{X}) = \text{const.}$$

On a donc

$$\overline{\omega\alpha}^2 + \overline{\omega\beta}^2 + \overline{\omega\gamma}^2 = \text{const.};$$

ce qui prouve que :

Si dans un plan diamétral d'une surface du second degré on trace arbitrairement un triangle, tel que la polaire de chacun de ses côtés, par rapport à la surface, passe par le sommet opposé, puis que par chaque côté on mène un plan tangent à la surface, les segmens interceptés entre le plan diamétral et ces trois plans tangens sur un axe fixe parallèle au diamètre conjugué au plan diamétral, seront tels que la somme de leurs carrés sera constante, quel que soit le triangle tracé dans le plan diamétral.

XX.

(48) Quand deux tétraèdres ont leurs faces respectivement parallèles, les arêtes du premier sont proportionnelles aux arêtes homologues du second. Soient A, B, C, D, les sommets du

premier tétraèdre, et A′, B′, C′, D′, les sommets homologues du second, on aura

$$\frac{AB}{A'B'}, = \frac{AC}{A'C'}, = \frac{AD}{A'D'}, = \text{etc.}$$

Faisons la transformation parabolique, nous aurons deux nouveaux tétraèdres; soient a, b, c, d et a', b', c', d', leurs faces correspondantes aux sommets des premiers; soient α, β, γ, δ et α', β', γ'; δ', les points où ces faces rencontrent l'axe du paraboloïde, on aura

$$\alpha\beta = AB \cos.\ (AB,\ X),$$
$$\alpha'\beta' = A'B' \cos.\ (A'B',\ X);$$

les deux cosinus sont égaux, puisque les arêtes AB, A′B′ des deux premiers tétraèdres sont parallèles, on a donc

$$\frac{\alpha\beta}{\alpha'\beta'} = \frac{AB}{A'B'};$$

on a pareillement

$$\frac{\alpha\gamma}{\alpha'\gamma'} = \frac{AC}{A'C'},\quad \frac{\alpha\delta}{\alpha'\delta'} = \frac{AD}{A'D'},\ \text{etc.}$$

et, par suite,

$$\frac{\alpha\beta}{\alpha'\beta'} = \frac{\alpha\gamma}{\alpha'\gamma'} = \frac{\alpha\delta}{\alpha'\delta'} = \text{etc.}$$

ce qui prouve que :

Quand deux tétraèdres ont leurs sommets deux à deux sur quatre droites parallèles entre elles, si l'on mène une transversale quelconque parallèle à ces droites, les segmens interceptés sur cette transversale entre les angles dièdres du premier tétraèdre, seront entre eux comme les segmens interceptés entre les angles dièdres du second tétraèdre.

(49) Si l'on a un angle solide et qu'on le coupe par deux plans parallèles, les sections seront deux polygones semblables; les côtés du premier seront proportionnels à ceux du second; faisons la transformation parabolique; aux arêtes de l'angle solide correspondront des droites situées dans un même plan; aux plans coupans correspondront deux points situés sur une droite parallèle à l'axe du paraboloïde (41 3°); et enfin les plans menés par chacun de ces points et par ces droites correspondront aux points où les plans coupans rencontrent les arêtes de l'angle solide; on conclut donc de là, comme dans le théorème précédent, que :

Si le sommet d'un angle solide variable, dont les faces tournent autour de droites fixes situées dans un même plan, parcourt une droite, les segmens interceptés sur une transversale parallèle à cette droite, entre les angles dièdres de cet angle solide variable, seront entre eux dans des rapports qui resteront constans pendant le mouvement du sommet de l'angle.

(50) Si plusieurs plans passent par une même droite, et qu'on tire deux transversales parallèles entre elles, les segmens compris sur la première transversale entre les plans pris deux à deux, seront entre eux comme les segmens compris sur la seconde transversale entre les mêmes plans.

Faisons la transformation parabolique; aux plans correspondront des points situés en ligne droite, aux deux transversales correspondront deux droites, situées dans un plan parallèle à l'axe du paraboloïde (41 2°), on conclut de là, comme pour les deux théorèmes précédens, que :

Étant donnés plusieurs points en ligne droite et un plan fixe, si par une droite prise arbitrairement dans ce plan, on mène des plans passant respectivement par les points donnés, les segmens interceptés entre ces plans sur une transversale parallèle au plan fixe, seront entre eux dans des rapports constans, quelle que soit la droite prise dans le plan fixe.

Ce théorème et le précédent auraient pu être déduits du théorème (48) relatif à deux tétraèdres.

(51) Ces théorèmes peuvent être fort utiles en géométrie.

Pour faire une application du dernier, soit un système de points A, B, C, ..., un plan fixe P, et une transversale parallèle à ce plan; par une droite L prise dans ce plan, menons des plans passant respectivement par les points A, B, C, ...; soient A′, B′, C′, ... les points où ces plans rencontrent la transversale; le plan mené par la droite L et par le milieu G′ des points A′, B′, passera par un point G de la droite AB, qui restera fixe pendant le mouvement de la droite L dans le plan P (d'après le théorème 50).

Si l'on prend sur la transversale un point H′, tel que $G'H' = \frac{1}{3} G'C'$, le plan mené par la droite L, et ce point H′ passera par un point fixe H de la droite CG.

Si l'on prend sur la transversale un point I′, tel que $H'I' = \frac{1}{4} H'D'$, le plan mené par la droite L et par ce point passera par un point fixe I de la droite HD.

Or, les points G′, H′, I′, sont les centres des moyennes distances, le premier des deux points A′, B′; le second des trois points A′, B′, C′; le troisième des quatre points A′, B′, C′, D′; on conclut donc de là ce théorème général :

Si l'on a un système de points placés arbitrairement dans l'esvace et un plan fixe, que par une droite prise arbitrairement dans ce plan, on mène des plans passant respectivement par les points donnés, et un dernier plan passant par le centre des moyennes distances des points où tous ces plans rencontrent une transversale parallèle au plan fixe, ce dernier plan passera par un point fixe, quelle que soit la droite prise dans le plan donné.

Quand le plan donné est à l'infini, le point fixe devient le centre des moyennes distances de tous les points du système.

XXI.

(52) Soient plusieurs points matériels A, B, C, ...; m, m', m'', ... leurs masses, et O leur centre de gravité.

Faisons la transformation parabolique, et soient a, b, c, ... o les plans correspondans à ces points.

Si par les points A, B, C, ... et O, on mène des plans tous parallèles entre eux, ils rencontreront l'axe du paraboloïde en des points A', B', C', ... O' dont le dernier sera le centre de gravité de tous les autres supposés matériels et ayant les masses m, m', m'', ...; c'est-à-dire qu'on aura

$$mo'A' + m'o'B' + m''o'C' + \text{etc.} = o.$$

Dans la transformation parabolique, aux plans parallèles que nous venons de mener correspondront des points α, β, γ, ... ω, situés sur les plans, a, b, c, ... o respectivement, et tous sur une même droite parallèle à l'axe du paraboloïde, et l'on aura

$$O'A' = \omega\alpha, \quad O'B' = \omega\beta, \quad O'C' = \omega\gamma, \text{ etc.}$$

et, par conséquent,

$$m\omega\alpha + m'\omega\beta + m''\omega\gamma + \text{etc.} = o.$$

Ce qui prouve que le point ω est le centre de gravité des points α, β, γ, ... supposés matériels et ayant des masses m, m', m'', ...

Si les plans menés parallèlement entre eux par les points A, B, C, ... O, avaient une autre direction, la transversale sur laquelle sont les points α, β, γ ... ω changerait de position, mais en restant toujours parallèle à l'axe du paraboloïde; on a donc ce théorème :

Si l'on a un système de plans supposés matériels et homogènes, que l'on mène une série de transversales parallèles à un axe fixe, et que l'on prenne sur chaque transversale le centre de gravité de tous les points où elle rencontre les plans, ces centres de gravité seront tous sur un même plan.

XXII.

(53) Soient trois surfaces du second degré, ayant deux à

deux la même intersection (réelle ou imaginaire); si par chaque point m de la première, on mène une transversale parallèle à un axe fixe, et qu'on désigne par A, A' et B, B' les points où cette transversale rencontre les deux autres surfaces, on aura

$$\frac{MA.\,MA'}{MB.\,MB'} = \text{const.}$$

Cela résulte du théorème analogue sur les coniques (8).

Faisons la transformation parabolique, nous aurons trois surfaces du second degré inscrites toutes trois dans la même développable; à chaque transversale correspondra une droite située dans un plan fixe parallèle à l'axe du paraboloïde (41 2°); aux points M, A, A', B, B', où la transversale rencontre les trois surfaces, correspondront des plans m, a, a', b, b', menés par cette droite et tangens aux trois nouvelles surfaces respectivement; soient μ, α, α', β, β', les points où l'axe du paraboloïde rencontre ces plans, on aura

$$\begin{aligned}\mu\alpha &= MA \cos.\,(MA, X),\\ \mu\alpha' &= MA' \cos.\,(MA, X),\\ \mu\beta &= MB \cos.\,(MA, X),\\ \mu\beta' &= MB' \cos.\,(MA, X);\end{aligned}$$

on a donc

$$\frac{\mu\alpha.\,\mu\alpha'}{\mu\beta.\,\mu\beta'} = \text{const.}$$

Cela prouve que :

Quand trois surfaces du second degré sont inscrites dans une même développable, si par une droite prise arbitrairement dans un plan fixe, on mène un plan tangent à la première surface et deux plans tangens à chacune des deux autres surfaces, qu'on fasse les produits des segmens compris sur une transversale fixe parallèle au plan donné, entre le plan tangent à la première surface, et les plans tangens à chacune des deux autres sur-

faces, le rapport de ces produits sera constant, quelle que soit dans le plan donné la droite par laquelle on a mené les plans tangens.

(54) Si le plan donné est à l'infini, les plans tangens seront parallèles entre eux et leur direction sera arbitraire; le segment compris entre deux plans sur la transversale sera égal à la distance de ces deux plans divisée par le sinus de l'angle que la transversale fait avec chacun de ces plans; le théorème peut donc alors être énoncé ainsi :

Quand trois surfaces du second degré sont inscrites dans une même développable, si on leur mène des plans tangens parallèles entre eux, les produits des distances d'un plan tangent à la première surface aux plans tangens à chacune des deux autres, seront entre eux dans un rapport constant, quelle que soit la direction des plans tangens.

(55) Quand un hyperboloïde à une nappe passe par les quatre côtés d'un quadrilatère gauche, on peut regarder chacune des deux diagonales du quadrilatère comme une surface du second degré qui a deux diamètres nuls, et qui est limitée aux deux points où elle perce l'hyperboloïde. Par chacun des côtés du quadrilatère on peut faire passer une infinité de plans qui sont tous tangens à cette surface et à l'hyperboloïde; les deux diagonales du quadrilatère et l'hyperboloïde peuvent donc être considérés comme trois surfaces du second degré, inscrites dans une même développable qui est l'ensemble des quatre côtés du quadrilatère. On conclut donc du théorème précédent que :

Quand un hyperboloïde à une nappe passe par les quatre côtés d'un quadrilatère gauche, le produit des distances de chaque plan tangent à l'hyperboloïde à deux sommets opposés du quadrilatère, est au produit des distances du même plan tangent aux deux autres sommets dans un rapport constant.

Ce théorème correspond au suivant, qui est un cas particulier du théorème sur les trois surfaces du second degré qui ont même intersection deux à deux : « Quand un hyperboloïde » à une nappe passe par les quatre côtés d'un quadrilatère

» gauche, le produit des distances de chaque point de l'hy» perboloïde aux plans de deux angles opposés du quadri» latère, est au produit des distances du même point aux » plans des deux angles dans un rapport constant. »

(56) Le théorème relatif à trois surfaces du second degré qui ont même intersection deux à deux, est un cas particulier d'une propriété générale de trois surfaces géométriques qui ont même intersection deux à deux; pareillement le théorème (53) est aussi un cas particulier d'une propriété générale, appartenant à trois surfaces géométriques inscrites dans la même développable.

(57) L'équation $\frac{\mu\alpha.\ \mu\alpha'}{\mu\mathcal{C}.\ \mu\mathcal{C}'} = \text{const.}$ (53) aurait lieu pour le second plan tangent à la première surface qu'on pourrait mener par la même droite que le premier; soit μ' le point où ce second plan tangent rencontre la transversale, on aura donc

$$\frac{\mu'\alpha.\ \mu'\mathcal{C}'}{\mu'\mathcal{C}.\ \mu'\mathcal{C}'} = \text{const.}$$

d'où

$$\frac{\mu\alpha.\ \mu\alpha'}{\mu\mathcal{C}.\ \mu\mathcal{C}'} = \frac{\mu'\alpha.\ \mu'\alpha'}{\mu'\mathcal{C}.\ \mu'\mathcal{C}'}$$

ce qui prouve que :

Quand trois surfaces du second degré sont inscrites dans la même développable, si par une droite on leur mène six plans tangens, toute transversale recontrera ces six plans en six points qui seront en involution.

On sait que la même relation a lieu entre les sinus des angles des plans tangens.

XXIII.

(58) L'une des propriétés générales les plus fécondes des surfaces géométriques est celle-ci : de quelque point de l'espace qu'on mène deux transversales parallèles à deux axes fixes, les produits des segmens compris sur chacune d'elles entre ce

point et la surface, seront entre eux dans un rapport constant. Ainsi les deux transversales menées par le point M, rencontrant la surface aux points A, A′, ..., et B, B′, ..., et deux transversales menées par un point N, respectivement parallèles aux deux premières, rencontrant la surface aux points C, C′, ... et D, D′, ..., on a

$$(1)\ldots\frac{MA.\ MA'\ldots}{MB.\ MB'\ldots}=\frac{NC.\ NC'\ldots}{ND.\ ND'\ldots}.$$

Faisons la transformation parabolique, nous aurons une nouvelle surface géométrique; les transversales MA, NC, étant parallèles entre elles, auront leurs polaires situées dans un plan fixe parallèle à l'axe du paraboloïde; pareillement les transversales MB, ND, auront leurs polaires situées dans un second plan parallèle à l'axe du paraboloïde; les deux transversales MA, MB, étant menées par le point M, leurs polaires seront dans un plan *m* polaires du point M; les polaires des deux transversales NC, ND, seront aussi dans un même plan *n*; les plans tangens à la nouvelle surface, menés par ces polaires, correspondront aux points A, A′, .., B, B′, ..., C, C′, ..., D, D′, ...; soient *a*, *a′*, ..., *b*, *b′*, ..., *c*, *c′*, ..., *d*, *d′*, ... ces plan β, et α, α', ... β, β', ... γ, γ', ... δ, δ', ... μ, ν, les points où l'axe du paraboloïde perce ces plans et les deux plans *m*, *n*; on aura

$$\mu\alpha = MA \cos.\ (MA,\ X),$$
$$\mu\alpha' = MA' \cos.\ (MA,\ X),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\mu\beta = MB \cos.\ (MB,\ X),$$
$$\mu\beta' = MB' \cos.\ (MB,\ X),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\nu\gamma = NC \cos.\ (NC,\ X),$$
$$\nu\gamma' = NC' \cos.\ (NC,\ X),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\nu\delta = ND \cos.\ (ND,\ X),$$
$$\nu\delta' = ND' \cos.\ (ND,\ X).$$

D'après ces expressions, et parce que cos. (MA, X) = cos. (NC, X), cos. (MB, X) = cos. (ND, X), l'équation (1) devient

$$\frac{\mu\alpha.\ \mu\alpha'\ldots}{\mu\beta.\ \mu\beta'\ldots}=\frac{\nu\gamma.\ \nu\gamma'\ldots}{\nu\delta.\ \nu\delta'\ldots}$$

équation relative à la seconde figure seulement; on en conclut ce théorème :

Si l'on a une surface géométrique, deux plans fixes et un axe fixe parallèle à l'intersection de ces deux plans, que l'on tire un plan tranversal quelconque, et que par les deux droites, suivant lesquelles ce plan rencontre les deux plans fixes, on mène les plans tangens aux deux surfaces, les produits des segmens compris sur l'axe fixe entre le plan transversal et les plans tangens menés par ces deux droites respectivement, seront entre eux dans un rapport constant, quel que soit le plan transversal.

Cette propriété générale des surfaces géométriques appartient aussi aux courbes géométriques à double courbure; ce qu'on voit, en supposant que dans le théorème d'où nous l'avons déduite, par une transformation parabolique, la surface proposée soit développable.

XXIV.

(59) Si une sécante quelconque rencontre un hyperboloïde et son cône asymptotique en quatre points A, B, et C, D, le segment compris entre un point de l'hyperboloïde et un point du cône sera égal au segment compris entre les deux autres points; ainsi l'on aura AC = BD.

Faisons la transformation parabolique, nous aurons une seconde surface du second degré; au cône asymptotique correspondra une section plane de cette surface, ce sera la courbe de contact de cette surface par le cylindre circonscrit qui aura ses arêtes parallèles à l'axe du paraboloïde auxiliaire; à la sécante et aux points A, B, et C, D, où elle perce l'hy-

perboloïde et le cône asymptotique, correspondront une droite et quatre plans, a, b et c, d, menés par cette droite tangentiellement à la nouvelle surface et à sa section plane. Soient α, β, γ, δ, les points où ces plans rencontrent l'axe du paraboloïde, lequel est parallèle aux arêtes du cylindre circonscrit à la surface suivant sa section plane, on aura

$$\alpha\gamma = \text{AC cos. (AC, X)},$$
$$\beta\delta = \text{BD cos. (AC, X)},$$

et, par suite, $\alpha\gamma = \beta\delta$; ce qui prouve que :

Si l'on a une surface du second degré et une section plane faite par un plan diamétral, et que par une droite quelconque on mène des plans tangens à la surface et à sa section plane; puis, que l'on tire une transversale parallèle au diamètre conjugué au plan diamétral, le segment intercepté sur cette transversale entre un plan tangent à la surface et un plan tangent à la courbe, sera égal au segment intercepté entre les deux autres plans tangens.

XXV.

(60) Ainsi que nous l'avons dit pour les figures planes (38), les théorèmes que nous venons de déduire, par la transformation parabolique, de propositions connues, donneraient eux-mêmes par une pareille transformation, de nouveaux théorèmes du même genre, mais plus généraux que ces propositions.

Par exemple, le théorème (52) donne immédiatement celui-ci:

Si l'on a plusieurs points matériels A, B, C, ... dans l'espace, un plan et une transversale parallèle à ce plan, que par une droite quelconque prise dans le plan on mène des plans passant respectivement par les points donnés A, B, C, ... et qu'on prenne le centre de gravité des points où ces plans ren-

contrent la transversale, ces points étant supposés avoir mêmes masses que les points A, B, C, ... respectivement, le plan mené par la droite et par ce centre de gravité passera par un point fixe, quelle que soit cette droite dans le plan donné.

Quand les masses sont égales, on retrouve le théorème (51) dont nous avons donné une démonstration directe; il est clair que cette démonstration s'applique au cas général où les points sont matériels et ont des masses différentes.

(61) Si l'on mène par la transversale un plan parallèle au plan donné, puis que la droite prise dans ce dernier plan tourne autour d'un point, on voit facilement que les rayons menés de ce point aux points donnés et au point fixe en question perceront le plan mené par la transversale en des points dont le dernier sera le centre de gravité de tous les autres supposés matériels, et ayant mêmes masses que les points A, B, C, ... respectivement; on a donc ce théorème :

Étant donnés des points matériels A, B, C, ... dans l'espace, et un plan, si le sommet d'un angle solide parcourt ce plan pendant que ses arêtes tournent respectivement autour des points A, B, C, ..., et qu'on prenne le centre de gravité des points où les arêtes de l'angle solide rencontrent un plan transversal parallèle au plan donné, ces points étant supposés avoir mêmes masses respectivement que les points A, B, C, ... la droite menée du sommet de l'angle à ce centre de gravité passera par un point fixe de l'espace.

Quand le plan donné est à l'infini, le point fixe est le centre de gravité des points A, B, C, ...

Ces théorèmes font partie du Mémoire de M. *Poncelet*, sur les centres des moyennes harmoniques (déjà cité p. 18 et 25). Le point fixe est ce que M. *Poncelet* appelle le centre des moyennes harmoniques des points A, B, C, ... par rapport au plan fixe.

M. *Poncelet* démontre une propriété bien remarquable de ce point, c'est que : « la valeur inverse de sa distance au » plan fixe est égale à la somme des valeurs inverses des » distances des points du système à ce plan, ces valeurs in-

» verses étant multipliées respectivement par les masses des » points, et cette somme étant divisée par la somme de toutes » ces masses. »

Théorèmes sur la division des surfaces et des corps, par THÉODORE OLIVIER, Professeur à l'École Centrale des Arts et Manufactures de Paris (1).

1° Si l'on divise le diamètre d'un cercle en n parties arbitraires et, si, sur chacune d'elles, comme diamètre, l'on trace un cercle, la surface du grand cercle sera égale au carré de la somme des racines carrées des surfaces de chacun des petits cercles.

En effet, représentant par R le rayon du grand cercle, et par r, r', r'', etc., r^n les rayons des petits cercles, l'on a $R = r + r' + r'' +$ etc., $+ r^n$; mais πR^2 égale la surface du cercle (R), peut s'écrire ainsi :

$$\pi.(r+r'+r''+\text{etc.}+r^n)^2=[\sqrt{\pi}(r+r'+r''+\text{etc.}+r^n)]^2=[\sqrt{\pi r^2}+\sqrt{\pi r'^2}+\text{etc.}+\sqrt{\pi r^{n2}}].$$

2° Pour la sphère, le théorème s'énonce ainsi :

Si l'on divise le diamètre d'une sphère en n parties arbitraires, et si, sur chacune d'elles, comme diamètre, l'on décrit une sphère, le volume de la grande sphère sera égal au cube de la somme des racines cubiques des volumes de chacune des petites sphères.

En effet $\frac{4\pi.R^3}{3}$, qui exprime la solidité de la sphère du rayon R, pourra s'écrire de cette manière :

$$\frac{4\pi}{3}(r+r'+r''+\text{etc.}+rn)^3=4[\sqrt[3]{\frac{\pi}{3}}(r+r'+r''+\text{etc.}+r^n)]^3=4\sqrt[3]{\frac{\pi r^3}{3}}+\sqrt{\frac{\pi r'^3}{3}}+\text{etc}\;]3.$$

---

(1) Voyez *tome IV*, page 205, des recherches analogues sur le triangle, par M. *Olivier* et différens auteurs.

3° Pour le cône et le cylindre droits ou obliques, et à base circulaire, le théorème s'énonce ainsi :

Si l'on divise l'une des génératrices du cône ou du cylindre en n parties arbitraires, et si, sur chacune d'elles, comme génératrice homologue, l'on construit un cône ou un cylindre, semblable au cône ou cylindre donné, le volume du grand cône ou cylindre sera égal à la somme des racines cubiques de chacun des petits cônes ou cylindres.

En effet, $\frac{\pi R^2 H}{3}$, qui est l'expression du volume d'un cône droit ou oblique et à base circulaire, peut s'écrire ainsi : $\frac{\pi . R^2}{3H^2} H^3$, et remarquant $H = (h + h' + h'' + \text{etc.} + h^n)$, h, h', h'', etc. étant les hauteurs des petits cônes semblables, l'on a :

$$\frac{\pi . R^2}{3H^2}(h + h' + h'' \text{ etc. } + h^n)^3.$$

Les volumes des cônes semblables sont entre eux comme les cubes des lignes homologues, on a donc :

$$\frac{\pi . R^2 H}{3} : \frac{\pi r^2 h}{3} : \frac{\pi r'^2 h'}{3} : \text{etc.} :: H^3 : h^3 : h'^3 : \text{etc.} :: R^3 : r^3 : r'^3 : \text{etc.}$$

d'où l'on tire :

$$\frac{\pi . R^2}{3H^2} = \frac{\pi r^2}{3h^2} = \frac{\pi r'^2}{3h'^2} = \text{etc.}$$

L'on aura donc

$$\frac{\pi R^2 H}{3} = \left[\sqrt[3]{\frac{\pi R^2}{3H^2}(h + h' + h'' + \text{etc.})}\right]^3 = \left[\sqrt[3]{\frac{\pi r^2 h}{3}} + \sqrt[3]{\frac{\pi r'^2 h}{3}} + \text{etc.}\right]^3$$

La démonstration pour le cylindre droit ou oblique et à base circulaire est identiquement la même, puisque $\pi . R^2 H$ est l'expression de son volume.

Paris, le 3 janvier 1829.

Théorème. Si l'on divise l'une des arêtes d'un tétraèdre en un nombre arbitraire de parties, et que, par chacun des points de division, l'on mène des plans parallèles aux deux faces opposées à l'arête, l'on détermine autant de petits tétraèdres qu'il y aura de parties sur l'arête. Désignant le volume du tétraèdre par T et ceux des petits tétraèdres par t, t', t'', etc., l'on a :

$$T = (\sqrt[3]{t} + \sqrt[3]{t'} + \sqrt[3]{t''} + \text{etc.})^3$$

Solution. Les tétraèdres T, t, t', t'', etc. seront semblables entre eux, désignant donc par Z, z, z', z'', z, etc., leurs hauteurs respectives, l'on a :

$$T : t : t' : t'' : \text{etc.} :: Z^3 : z^3 : z'^3 : z''^3 : \text{etc.}$$

désignent par X la base et Y la hauteur du triangle, base du tétraèdre T.

Par x la base et y la hauteur du triangle, base du tétraèdre t, et ainsi de suite : l'on a :

$$\frac{X.Y}{2}.\frac{Z}{3} = T, \quad \frac{xy}{2}.\frac{z}{3} = t, \quad \frac{x'.y'}{2}.\frac{z'}{3}. = t' \text{ etc.}$$

par conséquent :

$$\frac{XY}{2}.\frac{Z}{3} : \frac{xy}{2}.\frac{z}{3} : \frac{x'y'}{2}.\frac{z'}{3} : \text{etc.} :: Z^3 : z^3 : z'^3 : \text{etc.}$$

d'où l'on tire :

$$\frac{XY}{2.3.Z^2} = \frac{xy}{2.3.z^2} = \frac{x'.y'}{2.3.z'^2} = \frac{x''.y''}{2.3.z''^2} = \text{etc.}$$

le volume du tétraèdre T est

$$\frac{XY}{2}.\frac{Z}{3} \quad \text{et} \quad Z = z + z' + z'' + \text{etc.}$$

l'on peut donc écrire :

$$\frac{XY}{2}\cdot\frac{Z}{3}=\frac{XY}{2.3.Z^2}(Z)^3=\frac{XY}{2.3.Z^2}(z+z'+z''+z'''+\text{etc.})^3=$$

$$=\left[\sqrt[3]{\frac{XY}{2.3.Z^2}}(z+z'+z''+\text{etc.})\right]^3=\left[\sqrt[3]{\frac{xyz}{2.3}}+\sqrt[3]{\frac{x'y'z'}{2.3}}+\sqrt[3]{\frac{x''y''z''}{2.3}}+\text{etc.}\right]^3$$

Paris, le 28 août 1829.

Premier théorème. Si l'on divise en n parties l'un des côtés d'un polygone, et si, sur chacune des parties, l'on construit un polygone semblable au polygone donné, en désignant par P la surface du grand polygone, et par p, p', p'', etc., p^n, les surfaces des petits polygones semblables, l'on a :

$$P=[\sqrt{p}+\sqrt{p'}+\sqrt{p''}+\text{etc.}+\sqrt{p^n}]^2$$

Solution. L'on peut toujours construire sur le côté divisé en n parties, un triangle dont la surface soit égale à celle P du polygone donné. Dès lors, en construisant sur chaque partie de ce côté un triangle semblable, l'on sait qu'en désignant par T la surface du grand triangle, et par t, t', t'', etc., t^n les surfaces des petits triangles semblables, l'on a :

$$T=[\sqrt{t}+\sqrt{t'}+\sqrt{t''}+\text{etc.}+\sqrt{t^n}]^2$$

Les surfaces semblables sont entre elles comme les carrés des côtés homologues ; ainsi désignant par X le côté du grand polygone, et par x l'une de ses parties, l'on aura

$$P : p :: X^2 : x^2$$
$$T : t :: X^2 : x^2$$

d'où $$P : T :: p : t.$$

Mais puisque $P = T$ l'on a $p = t$, et aussi de même $p' = t'$, $p'' = t''$, etc. $p^n = t^n$. Donc, etc.

Des deux théorèmes généraux que je viens de démontrer, l'on déduit les deux théorèmes particuliers suivans.

Premier théorème. Si autour d'un point l'on construit n polygones semblables à un polygone donné, et ayant n sommets, et de telle manière que leurs côtés homologues soient parallèles entre eux : si ensuite l'on construit un polygone semblable au polygone donné, mais tel que son côté x soit égal à la somme $x+x'+x''+$ etc. $+x^n$ des côtés homologues des petits polygones, l'on aura, en désignant par P la surface de ce dernier polygone, et par p, p', p'', etc., p^n celles des petits polygones,

$$P=[\sqrt{p}+\sqrt{p'}+\sqrt{p''}+\text{etc.}+\sqrt{p^n}]^2.$$

Deuxième théorème. Si autour d'un point l'on construit n polyèdres semblables à un polyèdre donné, ayant n sommets, et de telle manière que leurs arêtes homologues soient parallèles entre elles : si ensuite l'on construit un polyèdre semblable au polyèdre donné, mais tel que son arête X soit égale à la somme $x+x'+x''+$ etc. $+x^n$ des arêtes homologues des petits polyèdres, l'on aura : en désignant par V le volume de ce dernier polyèdre, et par v, v', v'', etc. v^n ceux des petits polyèdres :

$$V=[\sqrt[3]{v}+\sqrt[3]{v'}+\sqrt[3]{v''}+\text{etc.}\sqrt[3]{v^n}]^3.$$

Il est évident que les deux théorèmes suivans :

1° Si par un point pris dans l'intérieur d'un triangle, on mène des parallèles à ses côtés, ces droites diviseront le triangle en six parties, dont trois seront des triangles tels que l'aire du triangle proposé sera égale au carré de la somme des racines carrées des aires de ces trois-là.

2° Si par un point pris arbitrairement dans l'intérieur d'un tétraèdre, on conduit des plans parallèles à ses quatre faces, ces plans diviseront le tétraèdre en quatorze parties, dont quatre seront des tétraèdres, tels que le volume du tétraèdre proposé sera égal au cube de la somme des racines cubiques des volumes de ceux-là.

dont M. *P. R.* a donné la démonstration dans le tome XIX, n° 12, des *Annales de Mathématiques* de M. *Gergonne*, ne sont qu'un cas particulier des deux théorèmes que je viens d'énoncer.

(*La suite au numéro prochain.*)

Paris, ce 1er septembre 1829.

Sur l'intégration de quelques équations différentielles, relatives au problème des oscillations du pendule simple dans un milieu résistant; par M. P.-F. Verhulst, docteur en sciences.

Le problème des oscillations du pendule simple dans un milieu résistant, se trouve résolu d'une manière extrêmement satisfaisante dans le *Traité de mécanique* de M. *Poisson* (§ 273). Pour ne point arrêter la marche de ses calculs par des artifices de calcul intégral que le lecteur est censé pouvoir suppléer de lui-même, l'auteur de cet excellent ouvrage, s'est borné à rapporter les intégrales des équations différentielles du premier et du second ordre qu'il rencontre, en s'astreignant uniquement à déterminer les constantes par des circonstances particulières au mouvement. Nous nous plaisons à croire que les personnes qui commencent l'étude de la mécanique, ne seront pas fâchées de trouver ici quelques développemens sur ce sujet, et de voir par quels moyens on parvient à ces intégrales. La première équation différentielle trouvée par M. *Poisson*, est celle-ci:

$$\frac{dx}{d\theta}=\frac{2g}{a}\cos.\theta+2amx.$$

« En intégrant cette équation linéaire et du premier ordre,
» par les méthodes connues, on trouve

$$x=\mathrm{C}.e^{2am\theta}+\frac{2g.\sin.\theta}{a(1+4a^2m^2)}\frac{4gm\cos.\theta}{1+4a^2m^2}$$

» C étant la constante arbitraire, et e la base des logarithmes
» dont le module est l'unité. »

En égalant l'inconnue x au produit de deux indéterminées X et z, on a les équations :

$$x = Xz, \quad dx = zdX + Xdz;$$

substituant ces valeurs dans la proposée :

$$\frac{zdX}{d\theta} + \frac{Xdz}{d\theta} = \frac{2g}{a}\cos.\theta + 2amzX\ldots\ldots (a),$$

ce qui peut s'écrire sous la forme suivante :

$$X\left(\frac{dz}{d\theta} - 2amz\right) = \frac{2g}{a}\cos.\theta - z\frac{dX}{d\theta}.$$

z étant arbitraire, on peut en disposer de manière à rendre nul le facteur $\frac{dz}{d\theta} - 2amz$, ce qui établit entre θ et z, la relation

$$2amd\theta = \frac{dz}{z}.$$

Intégrant des deux parts :

$$2am\theta = \log.z, \quad z = e^{2am\theta},$$

l'hypothèse $\frac{dz}{d\theta} - 2amz = o$, réduit l'équation ($a$) à

$$\frac{2g}{a}\cos.\theta - z\frac{dX}{d\theta} = o:$$

en substituant à z sa valeur $e^{2am\theta}$, on la transformera en

$$\frac{2g}{a}\cos.\theta - e^{2am\theta}\frac{dX}{d\theta} = o.$$

D'où l'on tire :

$$dX = \frac{2g}{a} \cdot \frac{\cos \theta . d\theta}{e^{2am\theta}} \ldots \ldots (b)$$

En appliquant à cette équation la méthode d'intégration par parties, on en déduira successivement :

$$X = \frac{2g}{a} \int_1 e^{-2am\theta} \cos.\theta \, d\theta = \frac{2g}{a} \left[e^{-2am\theta} \sin.\theta + 2am \int_2 e^{-2am\theta} \sin.\theta . d\theta \right]$$

$$\int_2 e^{-2am\theta} \sin.\theta . d\theta = K - e^{-2am\theta} \cos.\theta - 2am \int_3 e^{-2am\theta} \cos.\theta . d\theta.$$

K étant la constante arbitraire.

De l'identité des intégrales $\int_1$ et $\int_3$, on conclura :

$$\int_2 = K - e^{-2am\theta} \cos.\theta - 2am \times \frac{aX}{2g}$$

d'où

$$X = \frac{2g}{a} \left(e^{-2am\theta} \sin.\theta + 2amK - 2ame^{-2am\theta} \cos.\theta - \frac{2a^3m^2}{g} X \right)$$

tirant de là la valeur de X,

$$X = \frac{1}{e^{2am\theta}} \left(\frac{4gmK}{1 + 4a^2m^2} e^{2am\theta} + \frac{\frac{2g}{a} \sin.\theta}{1 + 4a^2m^2} - \frac{4gm \cos.\theta}{1 + 4a^2m^2} \right)$$

et, par conséquent, à cause de $x = Xz$, $z = e^{2am\theta}$:

$$x = \frac{4gmK}{1 + 4a^2m^2} e^{2am\theta} + \frac{2g \sin.\theta}{a(1 + 4a^2m^2)} - \frac{4gm \cos.\theta}{1 + 4a^2m^2}$$

ce qui reproduit l'intégrale du texte en représentant par C le coefficient constant $\frac{4gmK}{1 + 4a^2m^2}$.

Texte de M. Poisson : « Il est aisé de voir que l'on satisfait

» à cette équation en prenant

$$\theta_2 = k \cos.\left(t\sqrt{\frac{g}{a}} + k'\right) + \frac{am}{2} + \frac{am}{6}\cos. 2t\sqrt{\frac{g}{a}}.\text{ »}$$

Quoique la résolution des équations différentielles d'un ordre quelconque, présente le plus souvent des difficultés insurmontables, il est cependant un cas où on parvient à les intégrer d'une manière générale. C'est celui où la fonction principale et ses coefficiens différentiels ne montent qu'au premier degré. Pour appliquer à l'équation proposée la méthode des *coefficiens indéterminés variables*, que l'on doit à l'illustre *Lagrange*, nous supposerons

$$\theta_2 = C_1 y_1 + C_2 y_2 \ldots\ldots\ldots\ldots (c)$$

y_1 et y_2 étant les deux valeurs de l'inconnue dans l'équation $\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{g}{a}y = o$, à laquelle on satisfait en faisant $y = e^{mt}$; d'où résultent pour m les valeurs:

$$m = +\sqrt{\frac{-g}{a}},\; m = -\sqrt{\frac{-g}{a}}.$$

Par conséquent

$$y_1 = e^{t\sqrt{\frac{g}{a}}\sqrt{-1}},\; y_2 = e^{-t\sqrt{\frac{g}{a}}\sqrt{-1}}$$

Posant pour abréger

$$\sqrt{\frac{g}{a}} = b,\quad \frac{mg}{2} = c,$$

et observant que

$$1 - \cos. 2t\sqrt{\frac{g}{a}} = 2\sin.^2\sqrt{\frac{g}{a}}\,t = 2\sin.^2 bt;$$

$$y_1 = e^{bt\sqrt{-1}},\; y_2 = e^{-bt\sqrt{-1}}$$

$$\frac{d^2\theta_2}{dt^2} + b^2\theta_2 - 2c \sin.^2 bt = o.$$

Après avoir substitué à y_1 et à y_2 leurs valeurs, on différenciera l'équation (c) en regardant C_1 et C_2 comme des fonctions de t, ce qui donnera

$$\frac{d\theta_2}{dt} = \frac{dC_1}{dt}.e^{bt\sqrt{-1}} + bC_1.e^{bt\sqrt{-1}}\sqrt{-1} + \frac{dC_2}{dt}.e^{-bt\sqrt{-1}} - bC_2.e^{-bt\sqrt{-1}}.\sqrt{-1}.$$

Les facteurs C_1 et C_2 étant absolument indéterminés, on pourra les prendre tels que l'on ait

$$\frac{dC_1}{dt}.e^{bt\sqrt{-1}} + \frac{dC_2}{dt}.e^{-bt\sqrt{-1}} = o. \quad . \; . \; . \; . \; . \; (d)$$

Cette hypothèse réduit l'équation précédente à

$$\frac{d\theta_2}{dt} = bC_1 e^{bt\sqrt{-1}}.\sqrt{-1} - bC_2.e^{-bt\sqrt{-1}}.\sqrt{-1},$$

d'où l'on tire en différenciant

$$\frac{d^2\theta_2}{dt^2} = -b^2C_1 e^{bt\sqrt{-1}} - b^2C_2 e^{-bt\sqrt{-1}} + b.\frac{dC_1}{dt}e^{bt\sqrt{-1}}\sqrt{-1} - b\frac{dC_2}{dt}e^{bt\sqrt{-1}}.\sqrt{-1}.$$

En éliminant $d^2\theta_2$ et θ_2 dans la proposée, au moyen de cette dernière équation et de l'équation (c), il reste pour déterminer $\frac{dC_1}{dt}$ et $\frac{d.C_2}{dt}$,

$$b\sqrt{-1}\left(\frac{dC_1}{dt}e^{bt\sqrt{-1}} - \frac{dC_2}{dt}e^{-bt\sqrt{-1}}\right) - 2c \sin.^2 bt = o$$

Ce résultat étant combiné avec l'équation (d), donne pour $\frac{dC_1}{dt}$ et $\frac{dC_2}{dt}$ les valeurs :

$$\frac{dC_1}{dt}=\frac{c\sin.^2bt.e^{-bt\sqrt{-1}}}{b\sqrt{-1}},\quad \frac{dC_2}{dt}=\frac{-c\sin.^2bt.e^{bt\sqrt{-1}}}{b\sqrt{-1}}.$$

On intègrera ces différentielles par la méthode des quadratures, et l'on trouvera

$$C_1=\frac{c}{3b^2\sqrt{-1}}.e^{-bt\sqrt{-1}}(-\sqrt{-1}\sin.^2bt-\sin.2bt+2\sqrt{-1})+M$$

$$C_2=\frac{-c}{3b^2\sqrt{-1}}.e^{bt\sqrt{-1}}(\sqrt{-1}\sin.^2bt-\sin.2bt-2\sqrt{-1})+N$$

d'où l'on conclura finalement

$$\theta_2=\frac{c}{3b^2}(3+\cos.2bt)+Me^{bt\sqrt{-1}}+Ne^{-bt\sqrt{-1}}.$$

En vertu des égalités

$$e^{bt\sqrt{-1}}=\cos.bt+\sqrt{-1}\sin.bt,\ e^{-bt\sqrt{-1}}=\cos.bt-\sqrt{-1}\sin.bt,$$

le binome hors de la parenthèse devient égal à

$$(M+N)\cos.bt+\sqrt{-1}(M-N)\sin.bt$$

que les hypothèses

$$M+N=K,\ \sqrt{-1}(M-N)=K'$$

réduisent à

$$K\cos.bt+K'\sin.bt.$$

Remettant à la place de b et de c les quantités qu'elles représentent :

$$\theta_2=\frac{am}{6}\left(3+\cos.2t\sqrt{\frac{g}{a}}\right)+K\cos.bt+K'\sin.bt.$$

Telle est l'intégrale complète de l'équation proposée : pour la rendre identique avec celle du texte, il suffirait de supposer

$$arc\left(\text{tang.} = -\frac{K'}{K}\right) = k', \frac{K}{\cos. k'} = k$$

égalités auxquelles il sera toujours possible de satisfaire, puisque l'arc k' est donné par sa tangente.

Texte de M. Poisson : « Or, en faisant attention que le » coefficient de $\sin. 2t\sqrt{\frac{g}{a}}$ est est très-petit par rapport à celui » de $\sin. t\sqrt{\frac{g}{a}}$, il est aisé de voir que la somme des deux » termes qui composent la valeur de v, ne deviendra pas nulle » avant que l'arc $t\sqrt{\frac{g}{a}}$ ne soit devenu égal à la demi-circonfé» rence ; en la désignant par π, et la durée de l'oscillation » entière par T, on aura, comme dans le vide :

$$T = \pi\sqrt{\frac{a}{g}}. »$$

Lorsqu'on fait $v = o$, la valeur de t correspondante à cette hypothèse, est donnée par l'équation :

$$\left(\alpha - \frac{2\alpha^2 am}{3}\right)\sqrt{ag}.\sin. t\sqrt{\frac{g}{a}} + \frac{\alpha^2 am}{3}\sqrt{ag}.\sin. 2t\sqrt{\frac{g}{a}} = o$$

d'où il faut tirer la valeur de $\sin. t\sqrt{\frac{g}{a}}$.

Pour y parvenir, nous observerons que

$$\sin. 2t\sqrt{\frac{g}{a}} = 2\sin. t\sqrt{\frac{g}{a}}.\cos. t\sqrt{\frac{g}{a}};$$

ce qui nous permet de donner à l'équation précédente, la forme :

$$a\sqrt{ag}.\sin. t\sqrt{\frac{g}{a}}\left(1-\frac{2aam}{3}+\frac{2aam}{3}\cos. t\sqrt{\frac{g}{a}}\right)=o$$

On voit par ce moyen qu'elle est susceptible de deux solutions, en égalant séparément à zéro chacun des facteurs $\sin. t\sqrt{\frac{g}{a}}$

et $$1-\frac{2aam}{3}+\frac{2aam}{3}\cos. t\sqrt{\frac{g}{a}}.$$

De là résultent les valeurs :

$$\sin. t\sqrt{\frac{g}{a}}=o, \quad \cos. t\sqrt{\frac{g}{a}}=1-\frac{3}{2aam}.$$

Quoiqu'elles conviennent toutes deux au sens littéral de l'équation, il est évident que l'une d'elles ne peut appartenir à la question. Si l'on fait attention que la valeur de $\cos. t\sqrt{\frac{g}{a}}$ donnée par la seconde hypothèse, deviendrait égale à l'infini négatif, si l'on supposait nul le coefficient m, relatif à la résistance du milieu, il faudra nécessairement en conclure qu'on ne peut admettre la seconde solution. On prendra donc

$$\sin. t\sqrt{\frac{g}{a}}=o,$$

d'où $$t\sqrt{\frac{g}{a}}=o, =\pi, =2\pi, \ldots\ldots =i\pi.$$

Ce résultat étant indépendant de m, il sera encore vrai lorsque $m=o$, ce qui est le cas d'un pendule oscillant dans le vide : la valeur de l'arc $t\sqrt{\frac{g}{a}}$ est donc la même pour le vide et pour un milieu résistant, et par conséquent $=\pi$.

Sur l'idée de M. Rodolphe Meyer, *de mesurer les hauteurs des montagnes au moyen du pendule ;* par M. Thilo, professeur à Francfort.

La lecture de l'excellent ouvrage de M. le baron *de Zach*, sur l'attraction des montagnes (2 vol., publiés à Avignon en 1814), m'a rappelé un mémoire que j'ai eu l'honneur de lire à la société des physiciens d'Aarau en Suisse, il y a, seize ans. Les effets de l'attraction que les montagnes exercent vers le côté, sont bien peu sensibles, si on les compare à ceux qui s'exercent de haut en bas. En effet M. *de Zach*, a trouvé, pour le *Mimet* près de Marseille, que le pendule ne dévie que de deux secondes de la ligne verticale. De même, l'action du *Chimboraço*, selon les observations de *Bouguer*, n'était que de $7\frac{1}{2}$ secondes ; quoique ce grand géomètre se fût attendu à trouver des effets près de quatorze fois plus grands. De son côté, *Maskelyne*, qui avait estimé la déviation produite par le *Shehallien*, de 30 à 46 secondes, n'en trouva que six par ses observations. Quant à l'attraction, que les montagnes exercent sur un corps placé au-dessus d'elles, les effets sont bien plus frappans, quoique peut-être les sciences aient moins d'intérêt à s'en occuper que des autres qui peuvent avoir de l'influence sur les observations astronomiques et les opérations géodésiques. Les montagnes exercent, comme on verra plus bas, sur la ville de Quito dans l'Amérique méridionale, une attraction aussi grande vers le centre de la terre, que si cette ville était de 1416 pieds plus près de ce centre ; et sur le sommet du mont de *Pichincha*, comme s'il était de 3084 pieds plus bas. Je suis parvenu à ces résultats remarquables, en examinant une idée de M. *Rodolphe Meyer*, qui était alors président de la société d'Aarau, et qui proposa de mesurer les hauteurs des montagnes au moyen du pendule [1].

---

[1] Ce physicien distingué n'existe plus ; on lui doit un vaste almageste pour

Le lecteur voudra bien m'excuser de présenter ici mon mémoire tel que je l'ai lu dans cette société, dont j'aime toujours à me ressouvenir.

Mes chers collègues ! Lorsqu'en 1812 M. *Rodolphe Meyer*, à cause des temps défavorables, ne pouvait exécuter sur les glaciers toutes les observations et les expériences pour lesquelles il avait réuni des instrumens de tout genre, et fait des préparatifs très-dispendieux : il résolut de remettre ce voyage à un autre été, qui fût plus favorable à son entreprise, et d'étendre par un séjour prolongé sur ces hauteurs inhospitalières ses travaux beaucoup plus loin qu'il n'avait même pensé le faire dans ses deux premiers voyages. A ses opérations trigonométriques et aérométriques, qui étaient l'objet principal de ses travaux, M. *Meyer* voulait encore ajouter des déterminations de hauteurs, au moyen de la diminution de la force de gravité.

La proposition, de mesurer les hauteurs de montagnes par les oscillations du pendule, eut l'approbation de notre société. M. le conseiller *Zschokke*, qui pour son histoire de *Bavière*, entreprenoit un voyage à *Munich*, fut chargé de consulter à ce sujet M. *Reichenbach*, et de lui demander s'il consentirait à faire pour M. *Meyer* les instrumens nécessaires; comme les rapports de cet illustre mécanicien furent aussi très-favorables, je fus chargé de faire à la société une relation plus détaillée sur la possibilité d'effectuer de telles opérations.

---

les sciences physiques, dont il n'a malheureusement paru que quatre volumes in-4° ; on lui doit aussi d'avoir le premier monté sur la montagne de la *Jungfrau* (vierge), au canton de Berne, et d'avoir atteint son sommet malgré les plus grands périls. Cet homme vertueux et sobre, était plein d'enthousiasme pour les sciences, et ne regardait les lois civiles que comme le résultat de la volonté du plus fort ; peut-être est-il devenu la victime de cette opinion ? sa fin tragique ne peut diminuer la grandeur de ses mérites pour moi, je trouvai toujours en lui un ami, un protecteur sincère. Je n'oublierai jamais les services qu'il m'a rendus, non plus que cette réunion d'hommes savans, dont il était le président, et dont j'ai eu l'honneur de faire partie. (*Note de l'aut.*)

En m'acquittant aujourd'hui de cette commission, je ne prétends pas donner une théorie complète pour mesurer les hauteurs au moyen du pendule, mais je résous seulement *la question de savoir, si de telles opérations peuvent être exécutées ou non.* Je m'abstiens toutefois de prendre en considération toutes les petites circonstances, qu'il faudrait nécessairement considérer si l'on passait à l'expérience, mais qui influent si peu qu'elles ne décident rien quant à la détermination de notre question principale.

En supposant que la terre soit une sphère parfaite, d'une densité partout égale, sans montagnes et sans vallées à sa surface, dépourvue d'atmosphère, en outre dans l'état de repos parfait, et à l'abri de l'action des autres corps célestes ; si l'on désigne la distance d'un point hors de la terre, à la superficie par h et les autres quantités comme à l'ordinaire, on aura comme on sait,

$$n^2 : n'^2 = g : g' = (r + h)^2 : r^2,$$
$$n : n' = (r + h) : r,$$

et

$$h = \frac{r}{n'}(n - n') \ldots\ldots (1).$$

Dans cette expression de h ou de la hauteur cherchée au-dessus de la superficie de la terre, nous remarquons d'abord une chose essentielle quant à l'exactitude possible des instrumens, c'est que si, pour notre expérience, nous faisons usage des horloges à pendule, l'expression de h ne contient pas la valeur de g. Donc notre expérience est tout-à-fait indépendante de la longueur du pendule à secondes, qu'il est toujours très-difficile de déterminer exactement. Nous n'avons besoin que de deux horloges à pendule, qui aient un mouvement parfaitement égal l'un et l'autre, qui soient bien travaillées, et dont le pendule fasse des oscillations assez petites. Si l'on en place une dans un lieu plus haut que l'autre, celle qui est placée plus haut, retarde. Du nombre des secondes et des tierces, dont la plus basse avance

dans un temps donné, et du rayon de la terre qui est assez exactement connu, on peut déduire la hauteur en question. La friction de la verge à pendule au point de suspension n'exige aucune considération. Mais son extension par la chaleur cause une difficulté, qui peut cependant être facilement lévée, soit en se servant du pendule de compensation, soit en appliquant les réductions connues, qui sont fondées sur des expériences multipliées, ou, ce qui peut-être dans notre cas serait préférable, en se familiarisant avec son instrument, et en observant son mouvement à divers degrés de chaleur et en fondant ses réductions sur ces observations particulières. Même, pour le dire en passant, des expériences avec des tiges de pendule de diverses matières donneraient peut-être des résultats encore plus exacts sur l'extension de ces matières par la chaleur, que les expériences au moyen des thermomètres métalliques.

Avant de passer à la considération plus détaillée des *suppositions qui viennent d'être indiquées*, je montrerai au moins par la table suivante, que l'on pourrait, si ces suppositions étaient vraies, observer des différences sensibles entre le nombre des oscillations du pendule à diverses hauteurs au-dessus de la superficie de la terre, et que l'on pourrait de là déduire des résultats assez exacts pour les hauteurs mêmes.

	HAUTEURS AU-DESSUS DE LA SURFACE DE LA TERRE.	DIFFÉRENCE DANS LE MOUVEMENT DES HORLOGES POUR LE TEMPS			
		D'UNE HEURE.	D'UN JOUR.	DE 10 JOURS.	DE 100 JOURS.
	$9^p,074$	$\frac{1}{10}'''$	$2\frac{2}{5}'''$	$24'''$	$4''$
	18,148	$\frac{1}{5}'''$	$4\frac{4}{5}'''$	$48'''$	$8''$
Hauteur des maisons et des tours.	45,37	$\frac{1}{2}'''$	$12'''$	$2''$	$20''$
	90,74	$1'''$	$24'''$	$4''$	$40''$
	181,48	$2'''$	$48'''$	$8''$	$1'20''$
	453,7	$5'''$	$2''$	$20''$	$3'20''$
Hauteur des montagnes près d'Aarau.	907,4	$10'''$	$4''$	$40''$	$6'40''$
	1361,1	$15'''$	$6''$	$1'$	$10'$
	2722,2	$30'''$	$12''$	$2'$	$20'$
Hauteur du Rigi.	5444,4	$1''$	$24''$	$4'$	$40'$
Les montagnes les plus hautes en Europe.	10888,8	$2''$	$48''$	$8'$	$1^h20'$
	16333,3	$3''$	$1'12''$	$12'$	2^h

Cette table nous fait voir, que dans aucun cas l'observation ne se fait aussi vite qu'avec le baromètre; le moindre temps de l'observation est d'une heure. Mais en cela même, cette méthode de mesurer les hauteurs aurait un avantage sur toutes les autres, c'est qu'il dépendrait de nous de pousser l'exactitude aussi loin qu'on pourrait le désirer, si nous ne ménageons pas le temps employé à l'observation; du reste, il ne faut pas même tenir compte du temps, si l'on peut placer une horloge à pendule invariable dans un endroit bien sûr, puisqu'on n'est occupé qu'au commencement et à la fin de l'observation. — Toutefois la table n'est pas calculée avec une exactitude plus grande que ne l'exigeait son but. Dans la formule (1) j'ai pris $\frac{r}{n}$ au lieu de $\frac{r}{n'}$, pour rendre proportionnelles les hauteurs aux différences $n - n'$, en négligeant à dessein une petite erreur pour rendre ce calcul plus expéditif. Pour $n - n' = 3$ secondes dans une heure, c'est-à-dire, pour la valeur la plus grande de cette différence en Europe, l'erreur, dont la hauteur vraie est plus grande que la hauteur trouvée, ne monte qu'à $\frac{1}{1200}$ de la somme totale. Le rayon moyen de la terre est supposé de 19 600 000 pieds. — Comme enfin les différences des temps sont assez proportionnelles aux hauteurs mêmes, on peut placer la pendule inférieure à plusieurs mille pieds au-dessus de la vraie superficie de la terre, et l'on trouve la hauteur de la pendule supérieure au-dessus de l'inférieure encore assez exactement pour la différence de leur mouvement, et plus précise encore par une correction facilement applicable.

Or, si nous revenons aux élémens que nous avons négligés, il faut, en premier lieu, considérer la terre comme environnée de *l'air atmosphérique*. Il est assez démontré que le pendule fait ses oscillations aussi isochrones dans l'air, que dans l'espace vide. De plus, la circonstance que le pendule à secondes est, sous des conditions égales, plus court dans l'air que dans le vide, n'a aucune influence, parce que la vraie longueur du pendule à secondes nous est indifférente pour notre opération. Seulement il est à considérer que le pendule supérieur vibre

dans un air plus subtil que l'inférieur ; qu'il achève ainsi ses oscillations plus vite ; donc qu'il fait plus d'oscillations que si l'air était partout aussi dense qu'en bas. Mais aussi par cela même les réductions nécessaires seraient faciles à faire. Je proposerais encore d'évaluer par des expériences sous le récipient de la machine pneumatique, de combien le mouvement de la pendule s'accélère à divers degrés de raréfaction de l'air. (La pendule au reste ne devrait pas être trop haute pour devenir facilement transportable). Le récipient pourrait être choisi assez grand pour ce genre d'expériences, parce qu'il n'est pas besoin de pousser la raréfaction de l'air bien loin. De pareilles expériences pourraient encore conduire à des règles plus exactes, pour les corrections des pendules qui vibrent dans l'air atmosphérique.

Les *autres élémens négligés*, à l'exception d'un seul, que nous allons examiner de plus près, n'exigent ici presqu'aucune considération, parce que les erreurs qui en dérivent, peuvent toujours facilement être calculées selon des lois connues, et parce qu'en outre ces erreurs ne sont que des parties bien petites, eu égard aux nombres trouvés pour les hauteurs cherchées.

Mais il est presqu'impossible de surmonter les obstacles qui naissent de *l'inégalité de la superficie* et de la *différente densité dans l'intérieur* de la terre.

L'inégalité de la superficie de notre globe nous laisse à la vérité en doute sur la *vraie* on plutôt la *moyenne superficie* de la terre. Il est vrai qu'on démontre par des lois hydrostatiques que la mer présente cette superficie. Mais de cette démonstration il suit seulement que la mer occupe les lieux les plus profonds de la terre ; que par conséquent la moyenne superficie est plus haute que la mer, et plus basse que les sommets des hautes montagnes. Le lit de la mer est une cavité dans la superficie de la terre, qui n'est remplie d'eau qu'en partie. Cependant nous avons vu précédemment, qu'en déterminant la hauteur d'un endroit au-dessus d'un autre, on obtient une différence bien petite dans le résultat, si l'élévation de cet endroit ne surpasse

pas quelques milliers de pieds ; qu'ainsi nous pourrons toujours prendre, selon l'usage, la surface de la mer pour un point initial fixe, en déterminant les hauteurs des montagnes.

Mais un point sur le sommet d'une montagne n'est pas seulement attiré par les parties matérielles de la terre, qui sont contenues en dedans de sa superficie, déterminée par la surface de la mer, mais il l'est aussi par la masse de la montagne même, et en effet d'autant plus, que la montagne, à hauteur égale, étend plus son pied. Ainsi, la gravité au sommet de la montagne, recevra un accroissement bien important, qui détruira en grande partie la perte provenant de la distance de la terre; car les montagnes sont beaucoup plus plates qu'elles ne semblent l'être à la première vue, et elles ne doivent leur roideur apparente qu'à une illusion d'optique. Les effets de cet accroissement de la gravité sont les mêmes que si le sommet de la montagne était plus proche de la superficie de la terre. En mesurant donc la hauteur de la montagne au moyen du pendule, on la trouvera toujours plus petite. C'est ce qui est en effet prouvé par l'expérience dans les opérations de ce genre qu'on a exécutées, du moins dans celles qui me sont connues; car la supercherie dont parle *De Luc*, dans ses *Lettres physiques et morales sur l'histoire de la terre*, fut suffisamment reconnue, et contre le désir des imposteurs, a été plus utile que nuisible à la doctrine de *Newton*.

Mais a-t-on déjà mesuré effectivement des hauteurs au moyen du pendule? — Non. — Cette idée appartient à notre vénérable président. Elle est une réalisation ingénieuse du problème que *Bouguer* s'était proposé pendant son séjour dans l'Amérique méridionale, problème qui consistait à constater le décroissement de la gravité à diverses hauteurs au-dessus de la terre, par des expériences faites avec le pendule. *Bouguer* choisit trois endroits sous l'équateur, ou du moins qui ne s'en éloignaient que d'un demi-degré au plus, de sorte qu'on peut les regarder tous trois comme situés sous le même degré de latitude : la côte de la mer, la ville de Quito et le sommet du mont de Pichincha. Il trouva les longueurs réduites du pen-

dule à secondes (*Figure de la terre*, p. 342),
sur le Pichincha, à 2454 toises au-d. de la mer. = $438^l,69$
à Quito 1466 . . . . = $438^l,88$
sur le bord de la mer. . . . . = $493^l,21$

Si l'on pose le rayon de l'équateur = 3 271 980 toises; comme on a,

$$l : l' = g : g' = (r + h)^2 : r^2$$

donc

$$\sqrt{l} : \sqrt{l'} = r + h : r$$

et

$$h = -r + r\sqrt{\frac{l}{l'}} \quad \text{(II)},$$

On trouve pour les hauteurs calculées au moyen des oscillations du pendule

à Quito 1230 *t.*; donc trop basse de 236 *t.* = 1416^p
sur le Pichincha 1940 *t.* . . . . 514 *t.* = 3084^p.

Il est bien vrai que les longueurs du pendule à secondes, ne peuvent être observées aussi exactement que la différence des oscillations de deux horloges à pendule, qui peuvent être mises en mouvement et être arrêtées à un signe donné. Mais le défaut inévitable qui naît seulement de la manière imparfaite d'observer, ne peut être assez grand, pour qu'il en puisse résulter une différence de plusieurs milliers de pieds dans la hauteur trouvée. De plus, l'observation défectueuse aurait pu donner la hauteur aussi-bien trop grande que trop petite; mais ici, dans les deux cas, la différence se trouve du même côté, qui est en effet celui où il doit être d'après notre raisonnement.

Cette différence importante vient sans doute principalement de l'élévation extraordinaire de la terre ou du plateau mon-

tagneux sur lequel la ville de Quito et le mont Pichincha, sont situés ; et comme de pareilles élévations n'ont ni une forme régulière, ni une densité égale, leur influence sur la force de gravité dans leur voisinage, ne peut être non plus ramenée à un calcul rigoureux.

On ne peut déterminer quelle part l'*inégale densité* de la masse de la terre a sur cette différence, parce que nous ne connaissons pas le globe dans son intérieur, et parce que les observations à la surface de la terre, qui pourraient nous donner quelque lumière, sont encore trop rares, pour en déduire des conjectures avec quelque assurance.

Par conséquent la réponse à la question, *si les hauteurs des montagnes peuvent être mesurées au moyen du pendule*, doit être, je pense, la suivante :

Les déterminations des hauteurs des montagnes, au moyen des oscillations du pendule, donnent encore des résultats bien incertains, moins par le manque de différences sensibles dans le mouvement du pendule à diverses hauteurs, que par l'influence des élévations irrégulières et de la densité inégale du globe terrestre. — Quoique la réponse soit négative, néanmoins elle doit contenter sous un certain rapport; car notre curiosité est assez satisfaite, quand nous savons les hauteurs des fortes montagnes jusqu'à cent ou mille pieds d'exactitude.

Je suis donc enfin de l'avis de ceux qui croient superflues toutes les opérations ultérieures pour mesurer les montagnes au canton de Berne, depuis que M. *Tralles* les a déterminées trigonométriquement avec une précision admirable. Mais on ne connaîtrait pas l'histoire de la physique, si l'on voulait méconnaître les progrès qu'elle a faits même par les travaux de ceux qui, dans les déterminations des hauteurs, n'ont pas seulement cherché des résultats exacts pour ces hauteurs mêmes, mais qui ont aussi pris la peine de perfectionner et de multiplier les méthodes d'opérations, et de rechercher les lois de la nature en général. Si nous considérons la figure irrégulière de la terre, quelle variété de recherches ne pouvons-nous pas faire au moyen du pendule ! comment connaître l'intérieur

de la terre, qui nous resterait toujours caché, si le pendule ne nous permettait de faire des conjectures sur sa composition? et quel pays en Europe est plus propre à de telles recherches que la Suisse?

Remarque. Je n'ai point parlé du pendule à secondes. Mais si l'on suppose que, d'après la structure proposée par M. le baron *De Zach*, on puisse trouver sa longueur à $\frac{1}{100}$ d'une ligne par des expériences immédiates; il en résulterait toutefois une incertitude d'environ 160 pieds. C'est pourquoi je préfèrerais pour les opérations en question, les horloges à pendule, quoique pour les autres expériences avec le pendule, l'instrument de M. *De Zach* atteindrait mieux le but. Pour le reste, il n'en résulte aucune différence pour nos recherches. C'est alors la formule (II), d'après laquelle il faudrait calculer les hauteurs.

De la détermination du nombre de boulets qui entrent dans une pile dont la base a la forme d'un hexagone régulier; par J.-N. Noël, principal de l'Athénée de Luxembourg.

Cette question, dont l'énoncé se trouve à la page 280 du tome V de la *Correspondance*, suppose que l'on sache former un hexagone régulier avec des boulets de même diamètre, mis en contact sur un plan. Or, si on place un boulet, puis autour 6 autres boulets, autour de ceux-ci 12 boulets, autour de ces derniers 18 boulets, puis 24, 30, 36, ..., $6(n-1)$ boulets, on formera successivement des hexagones réguliers ayant 1, 2, 3, 4, 5, 6, ..., n boulets de chaque côté; et il est clair que le nombre de tous les boulets contenus dans le $n^{ième}$ hexagone, est

$$1+6+12+18+24+\ldots+6(n-1)=1+3n(n-1).$$

De sorte que $1 + 3n(n-1)$ est l'expression du $n^{ième}$ *nombre hexagonal*, et que les n premiers nombres *hexagonaux* sont :

$$1, 7, 19, 37, 61, 91, 127, \ldots, 1 + 3n(n-1).$$

Cherchons la somme S de ces n nombres ; et pour cela, observons que le ν^{me} nombre hexagonal étant $1 + 3\nu(\nu - 1)$, on a l'identité

$$1 + 3\nu(\nu-1) = 1 + (\nu-1)\nu(\nu+1) - (\nu-2)(\nu-1)\nu.$$

Posant donc, dans cette identité, successivement $\nu = 1, 2, 3, 4, \ldots, n$, et ajoutant entre elles les n identités résultantes, le premier membre de la nouvelle égalité sera la somme S des n premiers nombres hexagonaux, tandis que le second membre se réduira à $n + (n-1)n(n+1)$ ou à n^3 ; on aura donc $S = n^3$.

Ainsi *la somme des* n *premiers nombres hexagonaux est égale au cube de* n ; ce qui est assez remarquable.

Comme on peut toujours former une pile de boulets dont les n tranches, à partir du sommet, soient les hexagones réguliers ayant $1, 2, 3, 4, 5, \ldots, n$ boulets à chaque côté, on voit que le nombre de tous les boulets contenus dans cette pile est n^3.

Mais cette même pile est loin de renfermer tous les boulets que l'on peut placer sur l'hexagone régulier, dont chaque côté contient n boulets. Voici la construction d'une autre pile, ayant cet hexagone pour base :

Sur cette base, prise pour 1re tranche, on placera une 2e tranche, dont les rangées de boulets soient parallèles à une rangée de la base ; sur cette 2e tranche on placera une 3e, en procédant de la même manière ; sur cette 3e, une 4e, et ainsi de suite. On aura ainsi des tranches ayant toutes trois côtés non contigus de n boulets chacun, tandis que les trois autres côtés renfermeront chacun $1, 2, 3, 4, 5, \ldots, n-1$ boulets de moins, pour les tranches 2e, 3e, 4e, 5e, 6e, ..., ne. De sorte que la ne tranche sera un triangle équilatéral ayant n boulets de chaque côté. Il ne restera donc plus, pour achever la *pile hexa-*

gonale demandée, qu'à placer au-dessus de la *pile tronquée* que l'on vient de former, une pile pyramidale, dont chaque côté de la base triangulaire ait $n-1$ boulets.

Cette dernière pile se compose de $n-1$ tranches triangulaires de boulets; la 1re tranche, à partir du sommet, n'a qu'un boulet, la 2e a deux boulets de chaque côté, la 3e en a 3, la 4e 4, la 5e 5, ..., la ν^e en a ν. Ainsi le nombre de tous les boulets contenus dans cette $\nu^{ième}$ tranche est

$$1+2+3+4+\ldots+\nu=\frac{1}{2}\nu(\nu+1).$$

Mais il est aisé de vérifier qu'on a

$$\frac{1}{2}\nu(\nu+1)=\frac{1}{6}\nu(\nu+1)(\nu+2)-\frac{1}{6}(\nu-1)\nu(\nu+1).$$

Prenant donc, dans cette identité, successivement $\nu=1, 2, 3, 4, \ldots, n-1$, et ajoutant entre elles les $n-1$ identités résultantes, le premier membre de la nouvelle identité sera le nombre p de tous les boulets contenus dans la pile pyramidale triangulaire, et le second membre deviendra, réductions faites, $\frac{1}{6}(n-1)n(n+1)$; on aura donc

$$p=\frac{1}{6}(n-1)n(n+1).$$

Maintenant, pour déterminer le nombre total des boulets qui entrent dans la pile tronquée, on observe qu'en partant de la base supérieure, cette pyramide est composée de tranches hexagonales ayant toutes trois côtés non contigus de n boulets chacun, tandis que les trois autres côtés ne renferment chacun que 1, 2, 3, 4, ..., n boulets, dans les tranches 1re, 2e, 3e, 4e, ..., n^e. La $\nu^{ième}$ de ces tranches est donc composée de deux trapèzes, contenant chacun ν rangées de boulets. Les rangées du premier trapèze ont successivement $n, n+1, n+2, n+3, \ldots, n+\nu-1$ boulets; et les rangées du second en ont respectivement $\nu, \nu+1, \nu+2, \nu+3, \ldots, \nu+n-2$. Les nom-

bres respectifs de boulets contenus dans ces trapèzes sont donc

$$n\nu + (1 + 2 + 3 + \ldots + \nu - 1) \text{ ou } n\nu + \frac{1}{2}\nu(\nu - 1),$$

et $(n-1)\nu+(1+2+3+\ldots+n-2)$ ou $(n-1)\nu+\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$.

Ainsi le nombre de boulets contenus dans la ν^{me} tranche se réduit à

$$\frac{1}{2}(n-1)(n-2) + \frac{1}{2}\nu^2 + \frac{1}{2}(4n-3)\nu.$$

Prenant successivement $\nu = 1, 2, 3, 4, \ldots, n$, on aura successivement les nombres de boulets renfermés dans les diverses tranches de la pile tronquée ; la somme x de tous ces nombres sera par conséquent le nombre total de boulets que contient cette pile. Si donc on désigne par S_1 et par S_2 la somme des n premiers nombres entiers et celle de leurs carrés, il viendra

$$x = \frac{1}{2}n(n-1)(n-2) + \frac{1}{2}S_2 + \frac{1}{2}(4n-3)S_1.$$

On sait que la valeur de S_1 est $\frac{1}{2}n(n+1)$, et celle de $S_2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$. C'est ce qu'on vérifie d'ailleurs en observant que le $\nu^{ième}$ nombre entier est la même chose que $\frac{1}{2}\nu(\nu+1) - \frac{1}{2}(\nu-1)\nu$, tandis que le carré du $\nu^{ième}$ nombre entier a pour expression $\frac{1}{6}\nu(\nu+1)(2\nu+1) - \frac{1}{6}(\nu-1)\nu(2\nu-1)$; car en faisant successivement $\nu = 1, 2, 3, 4, \ldots, n$, et ajoutant les n résultats, la 1re expression donnera la valeur précédente de S_1, et la seconde expression la valeur de S_2.

Cette valeur de S_2 exprime aussi, comme on sait, le nombre de tous les boulets qui se trouvent dans la pile pyramidale à base carrée, le côté de cette base contenant n boulets.

Substituant les valeurs de S_1 et S_2 dans l'expression de x, puis opérant toutes les réductions, il viendra

$$x = \frac{1}{3}n[n(5n-3)+1].$$

Soit y le nombre demandé de tous les boulets contenus dans la pile hexagonale proposée ; on aura donc $y = x + p$. Substituant les valeurs précédentes de x et de p, et réduisant, on obtiendra

$$y = \frac{1}{6} n [n (11n - 6) + 1].$$

Par exemple, si $n = 5$, on aura $y = 205$, et si $n = 20$, il viendra $y = 14270$.

Il est bon de remarquer que la pile tronquée est comprise sous un hexagone régulier, trois carrés non adjacens entre eux, et quatre triangles équilatéraux, toutes ces figures ayant n boulets de chaque côté. Par conséquent, cette pile se compose, 1° d'une pyramide triangulaire de n boulets à chaque côté de la base ; 2° de deux prismes triangulaires renfermant chacun $n - 1$ tranclres triangulaires dont chaque côté a n boulets ; 3° enfin, d'un prisme triangulaire ayant n tranches triangulaires de $n - 2$ boulets à chaque côté. D'après cela, il est aisé de vérifier que le nombre de tous les boulets contenus dans la pile hexagonale tronquée, se réduit, comme plus haut, à $\frac{1}{3} n [n (5n - 3) + 1]$.

Dans la formation de cette pile tronquée, on doit placer constamment d'un même côté d'une même arête latérale, le premier boulet de chaque tranche. Mais si on le place alternativement d'un côté et d'un autre, qu'on prendra toujours les mêmes, il en résultera une nouvelle pile hexagonale, dont nous allons déterminer le nombre total des boulets.

Dans cette pile, la base est un hexagone régulier ayant n boulets de chaque côté; la tranche suivante est un hexagone régulier, la suivante un hexagone non régulier, et ainsi de suite alternativement, jusqu'à l'hexagone régulier dont chaque côté a 2 boulets et qui est surmonté par une pyramide de 4 boulets.

Il y a $n - 1$ hexagones réguliers; le ν^{me}, à partir de celui qui a 2 boulets pour côté, a $\nu + 1$ boulets de chaque côté, et contient par conséquent $1 + 2\nu(\nu + 1)$ boulets. De sorte

qu'en faisant successivement $\nu = 1, 2, 3, 4, \ldots, n-1$, et ajoutant, on verra que le nombre de tous les boulets contenus dans les $n-1$ hexagones réguliers, est n^3-1.

Il y a $n-2$ hexagones non réguliers; le ν^{me}, à partir de celui immédiatement au-dessous de l'hexagone régulier ayant 2 boulets de côté, à trois côtés de chacun $\nu+1$ boulets, et les trois autres de chacun $\nu+2$; ce ν^{me} hexagone non régulier contient donc, d'après ce qui précède, $3(\nu+1)^2$ boulets. De sorte qu'en faisant successivement $\nu = 1, 2, 3, 4, \ldots, n-2$, et ajoutant, on verra que le nombre de tous les boulets contenus dans les $n-2$ hexagones non réguliers, est $\frac{1}{2}n(n-1)(2n-1)-3$.

Ajoutant ce nombre au précédent et aux 4 boulets qui terminent la pile, on trouvera, pour le nombre total de boulets qui entrent dans cette pile,

$$\frac{1}{2}n[n(4n-3)+1].$$

Cette pile hexagonale admet plus de boulets que les deux précédentes; mais ses arêtes latérales ne forment pas des lignes droites, et elle me paraît moins *solide* que les deux autres.

Si les bases devaient avoir successivement $1, 2, 3, 4, \ldots, n$ boulets de chaque côté, il est aisé de s'assurer que, pour construire n piles hexagonales telles que la dernière que nous venons de considérer, il faudrait $\frac{1}{2}n^3(n+1)$ boulets : il en faudrait $\frac{1}{12}n(n+1)^2(n+2)$ pour construire n piles à bases carrées, et $\frac{1}{24}n(n+1)(n+2)(n+3)$ pour n piles à bases triangulaires.

On peut encore remarquer que si ν est la valeur numérique du rayon de chaque boulet, les plans contenant les centres des boulets qui forment les faces de la pile hexagonale tronquée, termineront un polyèdre ayant pour volume

$$\frac{20}{3}(n-1)^3r^3\sqrt{2}.$$

Nous regrettons de ne pouvoir consigner ici toutes les réponses qui nous sont parvenues sur la même question, réponses qui doivent nécessairement se ressembler ; nous nous bornerons en conséquence à indiquer les principales.

La solution de M. *Strootman*, de Bréda (1), est simple, mais elle dépend de quelques propositions que l'auteur énonce sans les démontrer. On peut faire la même observation à l'égard de celle de M. *Badon-Gugben*, qui se contente d'énoncer la loi que suivent dans la pile les couches qui ne sont point hexagonales. M. *Olivier*, de Paris, donne les formules demandées, mais sans développemens. Cet habile professeur fait cependant une remarque importante : c'est que l'on peut construire, sur une base hexagonale, un très-grand nombre de piles, parmi lesquelles il cherche celle qui contient le plus et celle qui contient le moins de boulets. Il remarque que la première ne doit pas être préférée dans les arsenaux, parce qu'on ne peut la détruire pièce à pièce, mais bien tranche à tranche. D'ailleurs elle offre moins de solidité que la pile *minimum*.

La solution de M. le professeur *Cambier*, de Bruxelles, ne laisse rien à désirer, si l'on considère uniquement la pile *minimum*. La formule à laquelle parvient l'auteur est la même que celle de MM. *Badon*, *Strootman* et *Noël*, ayant fait choix de la même inconnue.

M. *D. B...* traite la question avec beaucoup de détail ; mais en n'ayant égard qu'à la pile *maximum*, quoiqu'il ait fort bien vu que le problème comportait plus d'une solution. Nous avons donné la réponse de M. *Noël*, qui nous a paru plus complète en ce qu'elle offre les formules relatives à la pile *maximum* et à la pile *minimum*.

Nous sommes forcés de remettre au prochain numéro les réponses qui nous sont parvenues sur les autres questions.

---

(1) M. *Strootman* observe que cette question a déjà été proposée et résolue par lui dans un journal hollandais.

Note sur le rapport des prix des grains, par M. le conseiller Rau, professeur d'économie politique à l'Université de Heidelberg (1).

Le prix du seigle étant supposé représenté par 10, les autres grains se sont vendus, valeur moyenne :

	ANNÉES.	FROMENT.	ORGE.	AVOINE (2).
A Eimbeck, Hanovre,	de 1648-1747	12.73	7.15	4.36
A Berlin,	de 1789-1818	13.52	7.48	5.41
A Munich,	de 1747-1796	14.72	8.36	5.80

Ces rapports sont fixés non-seulement par les frais de culture et la demande des différens grains, mais aussi par la quantité de substance nutritive, quantité que l'on peut évaluer d'après les recherches faites jusqu'ici, de la manière suivante :

Froment.	12
Seigle	10
Orge	7.6
Avoine	5

Ces rapports sont établis par le célèbre *Thaer*, le plus grand agronome que l'Allemagne ait produit. D'après les recherches nouvelles de M. *Block*, agriculteur très-estimé, demeurant à

---

(1) Cette note, qui nous a été confiée par M. le conseiller *Rau*, pour faire suite aux articles insérés pages 74 et 279 de la *Correspondance*, tom. V, est extraite en grande partie de l'ouvrage de l'auteur *Lehrbuch der politischen OEkonomie* von D. Karl Heinrich Rau, etc. 1826, vol 1, pag. 134

(2) En prenant les prix moyens du froment et de l'avoine, on trouve 13.66 et 5.190 dont le rapport est 1 à 0.38, exactement comme nous l'avons trouvé pour Bruxelles et pour les six siècles précédens. A. Q.

Schierau, en Silésie, 100 livres de seigle, équivalent à

80	livres de froment.	
110	—	d'orge.
118	—	d'avoine.

Si, d'après ces évaluations de *Block*, nous calculons le rapport d'un volume donné des différens grains, nous trouvons, le seigle étant représenté par 10, pour :

Le froment	13.855
L'orge	8.105
L'avoine	5.615

Il sera peut-être utile d'ajouter une observation : les frais de culture ont un rapport prononcé avec la substance nutritive, parce que, par exemple, le froment épuise le sol plus que l'orge, et demande plus d'engrais. Cependant, les rapports des frais ne sont pas invariables et égaux à la quantité de substance nutritive, parce que, par exemple, le seigle se cultive encore sur des terrains sablonneux, qui ne peuvent porter du froment. L'avoine vient encore dans des terrains froids et sur un sol très-compacte (argileux), dont les mottes ne sont pas assez pulvérisées. C'est donc la partie utile des grains qui en règle le prix.

Le célèbre *Schwerz*, dans son excellent ouvrage : *Anleitung zum praktischen Ackerbau*, 2ᵉ vol. 1826, p. 99; raconte que sur les bords de la Meuse, qu'il a long-temps habités, les cultivateurs regardent :

4 hect.	de seigle,	comme équivalens à	3	hect.	de froment.
—	—	—	8	—	d'épeautre.
—	—	—	6	—	d'orge.
—	—	environ	8	—	d'avoine.

On peut déduire de là, en représentant le seigle par 10, les valeurs suivantes :

Froment.	13.33
Orge	6.6
Épeautre.	5
Avoine, plus que .	5

Tout considéré, je serais disposé à croire que le rapport du froment au seigle, signalé par *Thaer*, est inexact, et qu'au lieu de 10 à 12, il vaut mieux de le supposer à peu près de 10 à 13. *Thaer* se fonde sur une analise chimique, mais qui seule ne peut suffire, parce qu'ayant trouvé la quantité de l'amidon, du triticine, etc., nous ne connaissons pas encore les parties nourrissantes de ces substances séparées.

Il faut se rappeler encore que la composition des grains diffère beaucoup selon le terrain plus ou moins sablonneux, le climat plus ou moins favorable, selon l'engrais végétal ou animal, que l'on emploie, etc.

Correspondance et nouvelles scientifiques.

La Députation des états provinciaux du Hainaut vient de donner un *exposé de la situation de la province* en 1828, qui renferme des documens curieux sur les différentes parties de l'administration. Il serait à désirer que des travaux aussi détaillés, fussent présentés pour les autres provinces ; on y trouverait des matériaux précieux pour composer une statistique générale du Royaume. Nous y puiserons quelques données qui intéresseront peut-être nos lecteurs.

La population du Hainaut, au 31 décembre 1828, était de 574,750 âmes, dont 121,543 dans les villes, et 453,207 dans les campagnes. L'étendue de la province est d'environ 372,470 bonniers; et le nombre des maisons habitées est 109,578; ce qui donne environ 5 habitans par maison.

Il y a eu dans les communes rurales 3420 mariages; dans les villes 926, en tout 4346. Il n'y a eu qu'un seul divorce.

L'état des naissances, des décès et des vaccinations, a été le suivant :

		COMMUNES.	VILLES.
Naissances,	garçons.	8232	2167
—	filles.	7543	2085
Décès,	garçons.	4563	1393
—	filles	4295	1456
Vaccinations,	gratuitement. . . .	3325	1266
—	contre paiement. . .	2510	1852

Les nombres des élèves répandus dans les athénée et collèges, étaient les suivans : Tournai 342, Soignies 235, Mons 226, Ath 103, Thuin 90, Binche 85, Enghien 47, Charleroi 46, Chimai 38, en tout 1212 élèves, tant externes qu'internes.

On n'a importé dans la province que 180 livres de froment, et l'on en a exporté 4714043; et 87410 liv. de seigle, 66600 liv. d'avoine, 15300 liv. d'escourgeon, 132.400 liv. d'orge, 27000 liv. d'épeautre.

Le nombre des animaux utiles à l'agriculture, reconnu par recensement, est resté à peu près le même que l'année précédente :

10518	chevaux	au-dessous de 3 ans.
39611	—	au-dessus de 3 ans.
18850	bêtes à cornes	au-dessous de 2 ans.
74667	—	au-dessus de 2 ans.

Voici la progression des expéditions faites sur le canal de Mons, tant pour la France que pour la Belgique, depuis et y compris l'année 1816, jusqu'au 31 décembre 1828 :

En	1816. . .	3287 bateaux.	En 1823. . .	4052
	1817. . .	3460	1824. . .	4881
	1818. . .	3673	1825. . .	5370
	1819. . .	3739	1826. . .	5430
	1820. . .	3940	1827. . .	5440
	1821. . .	3998	1828. . .	6009
	1822. . .	3942		

une fois payés, lors de la remise du diplôme. La société tient ses séances à Paris, et les étrangers sont admis aux mêmes titres que les régnicoles. Le *bureau* sera composé d'un président, d'un secrétaire-général et de deux scrutateurs; la *commission centrale*, chargée de toute l'administration, sera composée de 26 membres, y compris le trésorier et l'archiviste-bibliothécaire. Cette commission se divisera en trois sections: 1° la section de physique et de mathématiques; 2° la section de physiologie animale et de médecine; 3° la section de physiologie végétale et d'agriculture. La première section comptera 12 membres, et les deux autres, chacune 6; outre les membres souscripteurs de la société, il y aura des membres correspondans qu'on choisira parmi les personnes qui, *en demandant ce titre*, l'appuieront de l'envoi d'ouvrages imprimés ou de manuscrits que la société jugera pouvoir concourir efficacement à son but.

QUESTIONS.

1° Étant donnés les points où trois sphères, de rayons connus, touchent un plan, trouver le centre et le rayon de la sphère tangente aux trois premières et au plan. (M. *Noël.*)

2° On demande quelle est la forme que prend une avalanche qui tombe en roulant le long d'un plan incliné couvert de neige. (M. *Reiss.*)

Mémoire sur les focales, par M. Van Rees, professeur de mathématiques à l'Université de Liége.

I. Soit S le sommet d'un cône du second degré (*fig.* 1), YY' son axe, KK' et LL' les génératrices situées dans une de ses sections principales. Si par un point quelconque A de la génératrice KK' ou mène une suite de plans perpendiculaires à la section principale, chacun d'eux coupe le cône suivant une courbe du second degré, dont un des axes sera la droite AB. Les foyers F, F' de la conique seront généralement placés sur cet axe, et l'ensemble des foyers ainsi obtenus formera une courbe plane, qu'on nomme *focale*.

M. *Quetelet* est le premier qui ait considéré la focale dans le cône droit, et en ait fait connaître quelques propriétés remarquables (1). Après lui, M. *Dandelin* 'a fait de cette courbe le sujet d'un beau mémoire inséré parmi ceux de l'Académie de Bruxelles (2). Je me propose de considérer ici les focales dans les cônes quelconques du second degré. Les propriétés générales de ces courbes que j'ai pu reconnaître, serviront en même temps à compléter celle de la focale dans le cône droit, à laquelle les travaux des géomètres que je viens de citer ont déjà donné un intérêt particulier.

II. Plaçons l'origine des coordonnées rectangulaires en S; soient SX, SY les axes des x et y dans le plan principal KSL; l'axe des z sera perpendiculaire à ce plan.

Par A menons le plan ADE, perpendiculaire à l'axe SY. Il coupe le cône suivant une ellipse, dont le centre est en D. Faisons SD $= b$, le demi-axe AD $= a$, et soit c le demi-axe, parallèle aux z. L'équation de l'ellipse sera

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

(1) *Dissertatio de quibusdam locis geometricis, necnon de curva focali.* Gand 1819.

(2) Mém. de l'Acad. de Bruxelles. Vol. II, pag. 169.

et celle du cône

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=\frac{y^2}{b^2}$$

Si, sans changer la direction des axes, nous transportons l'origine en A, cette dernière équation devient

$$\frac{(x-a)^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=\frac{(y+b)^2}{b^2}$$

Désignons par α la tangente de l'angle BAX; l'équation du plan coupant AB sera $y=\alpha x$, et éliminant y entre cette équation et la précédente, on obtient celle de la projection de la conique sur le plan des xz, savoir :

$$\frac{z^2}{c^2}=\frac{a^2\alpha^2-b^2}{a^2b^2}x^2+\frac{2(a\alpha+b)}{ab}x$$

Or, en nommant x' l'abscisse d'un point quelconque de la conique, rapporté à la droite AB comme axe, on a $x=\frac{x'}{\sqrt{1+\alpha^2}}$, ce qui donne pour l'équation de la conique considérée dans son plan

$$\frac{z^2}{c^2}=\frac{a^2\alpha^2-b^2}{a^2b^2(1+\alpha^2)}x'^2+\frac{2(a\alpha+b)}{ab\sqrt{1+\alpha^2}}x'.$$

Pour abréger, représentons cette équation par $Z^2=Mx'^2+Nx'$; les abscisses des foyers F, F', situés sur l'axe des x', seront alors données par l'équation

$$Mx'^2+Nx'-\frac{N^2}{4}=o$$

qui, en substituant à la place de M et N leurs valeurs, se réduit à

$$(a\alpha-b)x'^2+2ab\sqrt{1+\alpha^2}.\,x'-c^2(a\alpha+b)=o$$

Mais $x' = \sqrt{1 + a^2}.x$. Donc nous aurons, relativement à l'axe des x :

$$[(a\alpha - b)x^2 + 2abx](1 + a^2) - c^2(a\alpha + b) = o.$$

Éliminant α au moyen de l'équation $y = \alpha x$, qui appartient au plan coupant, la résultante appartiendra aux foyers de toutes les sections possibles, et sera par conséquent l'équation de la focale. On trouve ainsi :

$$(ay - bx + 2ab)(x^2 + y^2) - c^2(ay + bx) = o.$$

III. On simplifie cette équation en prenant un nouveau système de coordonnées rectangulaires $x''y''$, tel que l'axe des x'' soit perpendiculaire à la génératrice LL'. Les formules connues pour la transformation des coordonnées donnent

$$x = \frac{bx'' + ay''}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad y = \frac{-ax'' + by''}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Substituant, puis omettant les accens qui deviennent inutiles, on parvient à l'équation suivante de la focale

$$\left(x - \frac{2ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)(x^2 + y^2) + \frac{c^2}{a^2 + b^2}[(b^2 - a^2)x + 2aby] = o. \quad (1)$$

On vérifiera facilement, au moyen de cette équation, les résultats suivans, qui se déduisent d'ailleurs directement de la génération de la courbe;

La focale a deux branches infinies, ayant pour asymptote commune la génératrice LL', et dirigées de part et d'autre de cette asymptote.

Le sommet S est un des points de la focale.

La tangente en A coïncide avec la génératrice KK'.

IV. Le cône se transforme en cylindre elliptique, si on fait

$b = x$. Dans cette hypothèse, l'équation (1) se réduit à

$$(x-2a)(x^2+y^2)+c^2x=o.$$

On trouve plus généralement, en partant de l'équation $z^2 = mx^2 + nx$, qui comprend tous les cylindres du second degré, et procédant comme ci-dessus, l'équation suivante des focales cylindriques

$$(mx+n)(x^2+y^2)-\frac{n^2}{4}x=o,$$

qui est de même forme que (1), sauf le terme en y qui manque. Dans le cylindre parabolique on a $m = o$. Donc *la focale dans le cylindre parabolique est un cercle ayant pour diamètre la distance du point fixe A au foyer de la section normale passant par ce point.*

Les focales cylindriques se distinguent en général des autres focales par la présence d'un diamètre coïncidant avec l'axe des x.

V. Les calculs précédens prouvent que les focales sont représentées par l'équation

$$(x-\mathrm{A})(x^2+y^2)+\mathrm{B}x+\mathrm{C}y=o \qquad (2).$$

A, B, C étant des coefficiens quelconques. Seulement, puisque la génération des focales exige que a et b soient différens de o, le cas où $\mathrm{A}=o$ n'appartient pas rigoureusement à une focale. Il sera cependant inutile de distinguer ce cas dans les recherches suivantes, qui se déduiront de l'équation (2), prise dans toute sa généralité.

Si on la résout par rapport à y, on obtient

$$y=\frac{-\mathrm{C}\pm\sqrt{\mathrm{C}^2-4(x-\mathrm{A})(x^3-\mathrm{A}x^2+\mathrm{B}x)}}{x-\mathrm{A}}.$$

L'abscisse $x = A$, rendant y infinie, appartient à l'asymptote LL'. L'équation (2) donne encore pour cette abscisse la valeur $y = -\frac{AB}{C}$, qui est finie dans les focales coniques, infinie dans les focales cylindriques. Nous avons déjà remarqué (III) que le point d'intersection de la focale et de l'asymptote est le sommet du cône.

VI. Les limites de la courbe dans le sens des x se déduisent du signe du polynome soumis au radical. La plus haute puissance de x étant paire et affectée du signe —, la courbe est limitée dans le sens des x tant positives que négatives. Égalant ensuite ce polynome à o, ce qui donne

$$x = \frac{A \pm \sqrt{(A^2 - 2B \pm Z\sqrt{B^2 + C^2})}}{2}$$

on trouve par une discussion facile les résultats suivans, d'après lesquels les focales se divisent en trois espèces principales.

1re *Espèce.* $\frac{A^2}{4} - B - \frac{C^2}{A^2} > o$. (*fig.* 2.) Les quatre valeurs de x sont réelles et inégales. La focale est composée de deux parties distinctes, dont l'une est une courbe fermée, tandis que la seconde s'étend de part et d'autre le long de l'asymptote.

2me *Espèce.* $\frac{A^2}{4} - B - \frac{C^2}{A^2} = o$ (*fig.* 3.) Les deux valeurs moyennes de x deviennent égales entre elles, et $= \frac{A}{2}$. Les deux parties de la courbe se réunissent en formant un nœud.

3me *Espèce.* $\frac{A^2}{4} - B - \frac{C^2}{A^2} < o$. (*fig.* 4.) Deux valeurs de x sont imaginaires. La courbe est formée d'une seule branche continue.

VII. Si dans la formule $\frac{A^2}{4} - B - \frac{C^2}{A^2}$, dont le signe distingue les trois espèces de focales, on restitue à la place de A, B, C les valeurs de ces coefficiens prises dans l'équation (1), elle se change en $\frac{(a^2 - c^2)(b^2 + c^2)}{a^2 + b^2}$. Or, cette quantité est positive,

nulle ou négative suivant que $a > c$, $a = c$, ou $a < c$. Dans le premier cas le cône est surbaissé, dans le second il est droit, dans le troisième surhaussé par rapport au plan principal des xy. Les recherches de MM. *Quetelet* et *Dandelin* ayant été relatives aux focales dans le cône droit, appartiennent donc exclusivement à la seconde espèce.

Construction des focales.

VIII. Il résulte de la génération des focales que si par l'origine A on mène une droite quelconque AB (*fig.* 2, 3, 4), rencontrant la courbe en F et F′, ces points sont les foyers de la section du cône suivant AB. En M, milieu de AC, élevons la perpendiculaire indéfinie ZZ′; elle coupe AB au point O, milieu de cette droite et centre de la section conique. Cherchons l'expression des distances égales OF, OF′.

Soit $y = \alpha x$ l'équation de AB. Si entre cette équation et celle de la focale on élimine y, on trouve pour les abscisses de F, F′

$$(1 + \alpha^2)(x^2 - Ax) + B + C\alpha = 0.$$

Or, en faisant OF $=$ OF′ $= \delta$, et observant que l'abscisse du point O est $= \frac{A}{2}$, on a

$$\delta^2 = (1 + \alpha^2)\left(x - \frac{A}{2}\right)^2$$

Éliminant x entre ces équations, on pourra écrire le résultat sous la forme suivante

$$\delta^2 = \left(\frac{A\alpha}{2} - \frac{C}{A}\right)^2 + \frac{A^2}{4} - B - \frac{C^2}{A^2}$$

dont on déduit immédiatement la construction de chaque espèce de focales.

1re *Espèce*. Désignons la quantité positive $\frac{A^2}{4} - B - \frac{C^2}{A^2}$ par

D^2, nous aurons (*fig.* 2.)

$$\delta^2 = \left(\frac{A\alpha}{2} - \frac{C}{A}\right)^2 + D^2. \qquad (4)$$

Soit fait $MN = \frac{C}{A}$, donc $NO = \frac{A\alpha}{2} - \frac{C}{A}$. En N élevons la perpendiculaire $NP = D$; l'équation précédente devient

$$\delta^2 = \overline{NO}^2 - \overline{NP}^2 = \overline{OP}^2.$$

Donc, pour construire les focales de première espèce, on déterminera d'abord les points N et P en prenant

$$MN = \frac{C}{A}, NP = \sqrt{\left(\frac{A^2}{4} - B - \frac{C^2}{A^2}\right)},$$

puis, menant par A une droite quelconque AB, rencontrant l'ordonnée indéfinie ZZ' en O, on portera sur cette droite, de part et d'autre du point O, les distances OF, OF' égales à P. Les points F, F' appartiendront à la courbe.

2° *Espèce.* $\frac{A^2}{4} - B - \frac{C^2}{A^2} = o$ (*fig.* 3). L'équation (4) se réduit à

$$\delta^2 = \left(\frac{A\alpha}{2} - \frac{C}{A}\right)^2$$

Ayant déterminé le point N comme ci-dessus, on aura $OF = OF' = ON$. Cette construction très-simple de la focale dans le cône droit est due à M. *Quetelet.*

3° *Espèce.* Soit $\frac{A^2}{4} - B - \frac{C^2}{A^2} = -D^2$ (*fig.* 4.) ; on aura

$$\delta^2 = \left(\frac{A\alpha}{2} - \frac{C}{A}\right)^2 - D^2.$$

Soit toujours $MN = \frac{C}{A}$. Du point N comme centre et avec un rayon $= D$, décrivons le cercle $P<P'$, et menons la tangente

OT. Nous aurons $\overline{OT}^2 = \overline{ON}^2 - \overline{NT}^2 = \delta^2$. On construira donc les points F, F′ de la courbe en prenant $OF = OF' = OT$.

IX. Les constructions précédentes cessent d'être applicables lorsque $A = o$. Aussi nous avons déjà vu (V) que la courbe ne peut plus être considérée alors comme une focale. Nous ne nous arrêterons donc pas à modifier la construction pour ce cas particulier.

Dans les autres cas les élémens de la construction sont le point A, que nous nommerons dans la suite *sommet* de la courbe, la droite ZZ′, qui sert de *directrice*, le point N, qui pour la seconde espèce est le *nœud*, et la longueur NP.

Il est remarquable que, lorsqu'on suppose le point N éloigné à l'infini, en sorte que toutes les droites AB deviennent parallèles, la focale se transforme en une hyperbole équilatère, ou en un système de deux droites perpendiculaires entre elles. Nous verrons après que l'hyperbole équilatère jouit des propriétés fondamentales des focales.

Propriétés des focales en général.

X. Nous avons trouvé (V)

$$y = \frac{-C \pm \sqrt{[C^2 - 4(x - A)(x^3 - Ax^2 + Bx)]}}{2(x - A)}$$

ou

$$y = \frac{-C \pm \sqrt{[C^2 - 4B(x^2 - Ax) - 4(x^2 - Ax)^2]}}{2(x - A)}$$

La quantité soumise au radical jouit de la propriété de rester identiquement la même, lorsqu'on change x en $A - x$. Si donc on considère deux points x', y' et x'', y'' tels que $x' + x'' = A$, la quantité radicale aura la même valeur pour ces deux points, ce qui donne, en désignant cette quantité par R,

$$\left.\begin{aligned} y' &= \frac{-C \pm R}{2(x' - A)} = \frac{C \mp R}{2x''} \\ y'' &= \frac{-C \pm R}{2(x'' - A)} = \frac{C \mp R}{2x'} \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Prenant le radical R avec le même signe dans les deux équations, on en déduit $\frac{y'}{x'}=\frac{y''}{x''}$, ce qui prouve que les points ainsi déterminés sont placés, tels que F, F′, sur une même droite passant par le sommet.

Au contraire, si on emploie les signes opposés, on aura d'abord, en multipliant les équations (5) membre par membre,

$$y'y''=\frac{C^2-R^2}{4x'x''}$$

Mais

$$C^2-R^2=4B(x'^2-Ax')+4(x'^2-Ax')^2=-4Bx'x''+4x'^2x''^2$$

donc $$y'y''=-B+x'x''$$

ou $$x'x''-y'y''=B.$$

Si ensuite on ajoute les équations (5), après avoir fait disparaître les dénominateurs, on obtient

$$x'y''+x''y'=C.$$

XI. Ces relations remarquables donnent un intérêt particulier aux points qu'elles caractérisent. Nous nommerons donc *points conjugués* d'une focale un couple quelconque de points, dont les coordonnées satisfont aux équations suivantes.

$$x'+x''=A \qquad (6)$$
$$x'x''-y'y''=B \qquad (7)$$
$$x'y''+x''y'=C \qquad (8)$$

Ces équations contiennent déjà la condition que les points se trouvent sur la focale. Car on retrouve l'équation de cette courbe, en éliminant les coordonnées d'un des points conjugués.

La construction du point conjugué à un point quelconque F d'une focale, se déduit immédiatement de ce qui précède. (*fig.* 3.) Car, ayant mené de A la droite AF, rencontrant de nouveau

la courbe en F′, et par ce dernier point la droite F′G′, perpendiculaire à l'axe des x, G′ sera le point cherché. — On peut aussi mener d'abord par F, la perpendiculaire à l'axe FG, puis par A et G la droite AGG′, rencontrant la courbe au point conjugué G′.

Quant au point conjugué au sommet A, il est facile de s'assurer par les équations 6, 7, 8, qu'il se trouve à l'infini sur les branches asymptotiques.

On peut encore observer que dans les focales de seconde espèce, le nœud N est conjugué à lui-même.

XII. Si on élève au quarré les équations 7 et 8, on trouve en ajoutant :

$$(x'^2+y'^2)\,(x''^2+y''^2)=B^2+C^2$$

ou

$$\sqrt{(x'^2+y'^2)}\,\sqrt{(x''^2+y''^2)}=\sqrt{(B^2+C^2)}$$

ce qui indique que le *produit des rayons vecteurs, menés du sommet à deux points conjugués, est constant.* Dans les focales de seconde espèce, ce produit est égal au carré du rayon vecteur, mené au nœud.

En divisant les mêmes équations membre par membre, on obtient :

$$\frac{\frac{y'}{x'}+\frac{y''}{x''}}{1-\frac{y'y''}{x'x''}}=\frac{C}{B}$$

Or, en désignant pour φ', φ'' les angles que les rayons vecteurs menés aux points conjugués font avec les x, on a $\frac{y'}{x'}=\text{tang.}\varphi'$, $\frac{y''}{x''}=\text{tang.}\,\varphi''$, et l'équation ci-dessus se change en

$$\text{tang.}\,(\varphi'+\varphi'')=\frac{C}{B}$$

Donc *la somme des angles que les rayons vecteurs, menés*

du sommet à deux points conjugués quelconques, font avec l'axe des x, est constante. Dans les focales de seconde espèce, cette somme est égale au double de l'angle que le rayon vecteur mené au nœud fait avec l'axe.

XIII. Le dernier théorème peut être étendu aux droites menées d'un point quelconque de la focale à deux points conjugués. Pour le prouver, soient α, β les coordonnées de ce point, φ' et φ'' les angles que les droites indiquées forment avec l'axe, nous aurons

$$\text{tang. } \varphi' = \frac{y' - \beta}{x' - \alpha}, \quad \text{tang.} \varphi'' = \frac{y'' - \beta}{x'' - \alpha}$$

Dont on déduit en simplifiant le résultat au moyen des équations 6, 7, 8 :

$$\text{tang. } (\varphi' + \varphi'') = \frac{C - \beta A + 2\alpha\beta - \alpha\,(y' + y'')}{B - \alpha A + \alpha^2 - \beta^2 - \beta(y' + y'')}$$

Mais le point α, β se trouvant sur la focale, on a l'équation

$$(\alpha - A)\,(\alpha^2 + \beta^2) + B\alpha + C\beta = o$$

qui est identique avec la suivante :

$$\frac{C - \beta A + 2\alpha\beta}{B - \alpha A + \alpha^2 - \beta^2} = -\frac{\alpha}{\beta}.$$

En vertu de cette relation, l'expression de tang. $(\varphi' + \varphi'')$ se réduit à

$$\text{tang. } (\varphi' + \varphi'') = -\frac{\alpha}{\beta}.$$

Si le point α, β, ne se trouvait pas sur le focale, la réduction précédente ne pourrait avoir lieu, et la valeur de tang. $(\varphi' + \varphi')$ dépendrait de celle de $y' + y''$, qui varie pour chaque couple de points conjugués. Le théorème suivant appartient donc exclusivement aux points de la courbe :

La somme des angles que les droites menées d'un point de la focale à deux points conjugués quelconques, font avec l'axe des x, *dépend uniquement de la position du premier point.*

XIV. Soient donc A et D deux points conjugués *fig.* 5, P le point α, β, de la courbe. Par P menons la droite PQ, divisant en parties égales l'angle APD. Cette droite formera elle-même avec l'axe un angle, qui est $= \frac{1}{2}(\varphi' + \varphi'')$. Mais, en vertu du théorème précédent, cet angle est constant avec le point P. Donc aussi la position de la droite PQ, est indépendante du couple de points conjugués qu'on considère.

Puisqu'il s'agit ici uniquement, d'après la nature du calcul précédent, des directions indéfinies des droites PA, PD, il existe une seconde droite PQ', perpendiculaire à PQ, et divisant comme celle-ci l'angle des droites PA, PD en parties égales. Désignant par φ, l'inclinaison d'une quelconque de ces droites PQ, PQ' sur l'axe, on aura l'équation

$$\text{tang.}\, 2\varphi = -\frac{\alpha}{\beta},$$

donc on déduit deux valeurs pour φ, différentes entre elles d'un angle droit.

Nous nommerons dorénavant *droites moyennes au point* P, les droites PQ, PQ', jouissant de la propriété indiquée; leur construction n'a aucune difficulté, dès qu'on connaît deux points conjugués. On peut prendre à cet effet le sommet O et son conjugué, éloigné à l'infini le long de l'asymptote, car ayant mené PO et la droite indéfinie NPN', parallèle à l'asymptote, il suffira de diviser en parties égales les angles NPO, N'PO.

XV. Les droites PA, PD rencontrent la courbe en deux autres points B, C, qui sont aussi conjugués entre eux; car si le point conjugué à B, était différent de C, la moyenne PQ ne diviserait pas en parties égales l'angle formé par les droites menées de P vers ces deux points conjugés, ce qui serait contraire au résultat de l'article précédent.

Donc, *si par un point quelconque* P *de la focale, on mène*

deux droites PB, PD, *formant des angles égaux de part et d'autre avec des droites moyennes en* P, *et coupant la courbe chacune en deux points* A *et* B, C *et* D, *les points d'intersection sur la première droite, seront respectivement conjugués aux points d'intersection sur la seconde droite.* On distingue facilement les points conjugués par leur propriété d'être à égale distance de la directrice ZZ'.

Réciproquement *si de deux points conjugués* A, D, *on mène des droites à deux autres points conjugués* B, C, *ces droites se rencontreront en un point* P *de la focale.*

Appliquant ce dernier théorème aux droites AC, BD, on voit que leur intersection R est encore un point de la courbe. Les points P et R sont d'ailleurs conjugués entre eux, comme étant les intersections de la courbe et des droites, menées de B aux points conjugués A, D.

Les six points A, B, C, D, P, R, conjugués deux à deux, forment ainsi les sommets d'un quadrilatère complet, inscrit à la focale, et dont les diagonales sont les droites AD, BC, PR, réunissant respectivement les points conjugués. Les milieux H, K, L, de ces diagonales, se trouvent en ligne droite sur la directrice, ce qui s'accorde avec un théorème connu sur le quadrilatère complet.

XVI. Si l'on fait coïncider les droites PB, PD, avec la moyenne PQ, le premier théorème de l'art. XV se réduit au suivant :

Une droite, moyenne en un point de la courbe, la rencontre en deux autres points, conjugués entre eux.

Réciproquement : *Une droite, passant par deux points conjugués, est moyenne au troisième point, dans lequel elle rencontre la courbe.*

Ce dernier résultat peut aussi être démontré directement. Considérons à cet effet le point E, intersection de la focale et de la droite PR. Les moyennes en ce point divisant en parties égales les angles formés par les droites EP, ER, menées aux points conjugués P, R (XIV), et ces droites coïncidant de direction, on voit que l'une des deux moyennes est PR elle-même, tandis que l'autre lui est perpendiculaire.

XVII. Les résultats que nous venons d'obtenir, conduisent immédiatement à la construction des tangentes à la focale, passant par un point donné de la courbe.

Concevons que le point A se rapproche indéfiniment du point P, et finisse par coïncider avec lui; dans ce cas, son conjugué D coïncidera avec R, tandis que les droites PAB, RDB, qui n'ont pas cessé de se rencontrer sur la focale, deviendront simultanément tangentes en P et R. En outre, les droites PD, RA, se placeront sur PR, et leur intersection C, qui est conjuguée à B, tombera en E. Donc :

Les tangentes, menées à la focale en deux points conjugués, se rencontrent sur la courbe en un point conjugué à celui où elle est coupée par la droite, réunissant les points de contact.

Maintenant, pour mener une tangente à la courbe en un point donné P, *fig.* 6, on déterminera son conjugué R (XI), puis ayant mené PR, coupant la courbe en C, on cherchera le point B, conjugué à C. La droite PB sera la tangente cherchée.

Pour mener d'un point donné B de la focale des tangentes à d'autres points de la courbe, on construira (XIV), les droites PCR, CVT, moyennes au point C, conjugué à B. Les points dans lesquels ces droites rencontrent la focale, sont autant de points de contact. Si chacune d'elles rencontre la courbe en deux points, ce qui est le cas de la figure, on obtient quatre tangentes.

Remarquons que par le point B, pris comme point de contact, on peut mener une cinquième tangente. Maintenant si au lieu de ce point on en considère un autre, qui en soit infiniment rapproché, mais situé hors de la courbe du côté convexe, il est évident que la dernière tangente sera remplacée par deux autres, tandis que les quatre premières resteront réelles. Il est donc possible de mener d'un même point six tangentes à la focale.

XVIII. D'un point quelconque X de la courbe (*) (*fig.* 5),

(*) Le point X, ainsi que les droites qui en partent, ne sont pas indiqués dans la figure. Le lecteur y suppléera facilement.

soient menées des droites aux points A et D, B et C, conjugués deux à deux. Si d'abord on suppose le point X placé hors du quadrilatère complet PABCDR, il est facile de voir que celle des droites moyennes en X, qui divise en parties égales l'angle AXD, divise de même l'angle BXC. Il en résulte que les angles AXB, CXD sont égaux entre eux, ainsi que les angles AXC, BXD.

Si le point X est placé en dedans du quadrilatère, sur l'un des arcs AC, BD, celle des moyennes en X, qui divise en parties égales l'angle AXD, divise de même l'angle adjacent ou supplémentaire à BXC. Soit B'X le prolongement de BX. Puisque les angles AXD, B'XC sont divisés en parties égales par une même droite, on aura comme ci-dessus AXB' = DXC, AXC = DXB'. Mais AXB', DXB' sont supplémentaires de AXB, DXB. Donc les derniers angles seront aussi respectivement supplémentaires de DXC, AXC. Donc :

Les cordes AB et CD, ou AC et BD, menées de deux points conjugués de la focale à deux autres points conjugués, sont vues d'un point quelconque de cette courbe sous des angles égaux ou supplémentaires.

Les cordes dont il s'agit ici pourraient être nommées *cordes conjuguées*. La figure 6 offre, outre celles dont il a été question, plusieurs autres couples de cordes conjugées. Telles sont PA et RD, PD et RA, PB et RC, PC et RB.

XIX. *Réciproquement, étant données deux droites finies dans un plan, le lieu des points, desquels on les voit sous des angles égaux, est une focale, dont ces droites sont deux cordes conjuguées.*

La construction des élémens de cette focale se déduit sans peine de ce qui précède. (*fig.* 8.) Soient AB, CD les droites données. Les extrémités de l'une seront, par rapport à la focale à construire, des points respectivement conjugués aux extrémités de l'autre. Or, ceci peut se faire de deux manières, savoir en combinant A avec D, B avec C, ou bien en combinant A avec C, B avec D. Chacune de ces combinaisons donne lieu à une focale différente, qui résout le problème. Bornons-nous à la première combinaison.

La droite, menée par les milieux de AD, BC, qui réunissent les points conjugués, sera la *directrice* de la courbe.

Soit P le point de concours de AB, CD; R celui de AC, BD; les points P, R forment un nouveau couple de points conjugués (XV). Par ces points menez les droites MM′, NN′, parallèles à la directrice.

En P faites l'angle DPO = APM, la droite PO passera par le sommet (XIV). En R faites de même l'angle ARO = DRN; l'intersection O des droites PO, RO sera le *sommet*.

De O menez à deux des points A, B, C, D, non conjugués, par exemple à C et D, des droites OC, OD, rencontrant la directrice respectivement en F, G. De ces points comme centres, avec les rayons FC, GD, décrivez deux circonférences de cercles.

Si ces circonférences se coupent, les points d'intersection (P), (P′) seront ceux indiqués par les mêmes lettres dans la construction de l'art. VIII. La focale sera de 1re espèce.

Si elles se touchent, la focale est de 2e espèce. Le point de contact, placé sur la directrice, sera le *nœud* de la courbe.

Si elles ne se coupent ni ne se touchent, on construira le cercle qui les coupe à angles droits, et dont le centre se trouve sur la directrice. Ce cercle sera celui employé dans la construction des focales de la 3e espèce (VIII).

XX. La construction précédente subit de légères modifications dans des cas particuliers. Ainsi, lorsque les droites AB, CD sont parallèles, la directrice sera aussi parallèle à chacune d'elles, le point P s'éloignera à l'infini sur la branche asymptotique, et le point R sera le sommet de la courbe (XI). La construction s'achèvera d'ailleurs comme ci-dessus. — Mais si AC, BD sont parallèles en même temps que AB, CD, le sommet passera lui-même à l'infini, et on rencontre le cas prévu à l'art. IX, dans lequel la focale se transforme en *hyperbole équilatère*. Les droites données sont alors égales et parallèles entre elles.

Pour vérifier cette transformation de la focale par le calcul, soit

$$xy = a^2$$

l'équation d'une hyperbole équilatère, rapportée à ses asymptotes. Considérons deux de ses points, x', y' et x'', y'', situés aux extrémités d'un même diamètre, en sorte que $x''=-x'$, $y''=-y'$. Soit α, β un autre point quelconque de l'hyperbole. Désignons encore par φ', φ'' les angles que les droites menées de ce point aux deux premiers, font avec l'axe. On aura

$$\text{tang.}\ \varphi'=\frac{y'-\beta}{x'-\alpha},\ \text{tang.}\ \varphi''=\frac{y''-\beta}{x''-\alpha}=\frac{y'+\beta}{x'+\alpha},$$

dont on déduit

$$\text{tang.}\ (\varphi'+\varphi'')=\frac{2(x'y'-\alpha\beta)}{x'^2-\alpha^2}=o.$$

Cette équation, semblable à celle que nous avons trouvée (XIII) pour la focale, prouve que *les angles des droites menées d'un des points d'une hyperbole équilatère aux extrémités d'un diamètre quelconque, sont coupés en parties égales par les parallèles aux asymptotes, passant par ce point.*

Maintenant, si on considère les extrémités d'un second diamètre, on trouve par un raisonnement pareil à celui de l'art. (XVIII) :

Deux cordes égales et parallèles d'une hyperbole équilatère sont vues d'un point quelconque de cette courbe sous des angles égaux ou supplémentaires, suivant que le point de vue se trouve en dehors des cordes parallèles ou qu'il est compris entre elles.

Propriétés particulières des focales dans le cône droit.

XXI. Nous terminerons ce mémoire en ajoutant quelques propriétés particulières des focales dans le cône droit, qui n'avaient pas encore été remarquées, et qui se déduisent sans peine des principes établis ci-dessus.

On a vu (XI) que le nœud de ces courbes est un vrai point double conjugué à lui-même *fig.* 7. Il en résulte qu'une droite quelconque PN menée par le nœud, doit être considérée comme passant par deux points conjugués. Mais toute droite, passant

par deux points conjugués, est moyenne au troisième point, dans lequel elle coupe la courbe (XVI). Il en résulte que *la droite, menée d'un point quelconque de la courbe au nœud, est une des moyennes en ce point.*

XXII. Soit PABCDR un quadrilatère complet, inscrit à la focale, et dont les six sommets sont conjugués deux à deux (XV). D'après le théorème précédent, les droites PN, CN, RN sont respectivement moyennes en P, C, R, et divisent par conséquent en parties égales les angles APD, ACD, ARD, ce qui prouve que le point N est le centre d'un cercle, inscrit au quadrilatère.

Si on fait varier la position des points conjugés A, D, et par suite celle de B, C, les points P, Q restant fixes, on obtient une suite de cercles, inscrits aux quadrilatères successifs, et ayant leur centre commun en N.

Ceci donne lieu à la construction suivante de la focale dans le cône droit : *Étant donnés trois points, non situés en ligne droite, si autour d'un de ces points comme centre on décrit une suite de cercles, puis que des deux autres points on mène à chacun de ces cercles eux-mêmes quatre tangentes, le lieu des intersections des tangentes sera une focale, dont le nœud se trouvera au premier point.*

XXIII. Considérons le cercle passant par le point C. La droite NCN′ en est une normale. Elle est d'ailleurs moyenne en C, et par conséquent l'angle PCN′ égal à l'angle RCN′. Donc un rayon lumineux PC, émané de P et tombant en C sur la circonférence, sera réfléchi suivant CR. On prouvera de même que le rayon incident PB sera réfléchi suivant BR pour la circonférence passant par B. Quant aux rayons PA, PD, ils seront réfléchis dans les directions AR′, DR″, dont les prolongemens passent encore par R. Le même raisonnement étant applicable à un point quelconque de la courbe, on voit que *la focale est le lieu des points brillans sur une suite de cercles concentriques, éclairés par un point lumineux, le point de vue étant placé hors de la droite qui réunit le point lumineux au centre commun des cercles.* (*Voyez* t. III, p. 223, et t. IV, p. 118.)

De la courbe produite par les intersections successives de deux droites pivotant autour de deux points fixes, de manière que la vitesse angulaire de l'une soit double de celle de l'autre. (Voyez *Correspondance Mathématique*, tom. V, n° II); par M. LE FRANÇOIS, instituteur à Bruges.

Je rappellerai d'abord que nous avons nommé sommet de la courbe (G), le centre du mouvement le plus rapide, et nœud celui du mouvement le plus lent; que $A=\frac{c-d}{1+cd}$, $C=\frac{e-d}{1+ed}$; que d et e sont les tangentes trigonométriques des angles au nœud et au sommet des droites mobiles dans leur position primitive; que ces angles sont respectivement a et b, et qu'enfin $2n$ est la distance des deux centres, distance que, pour abréger, nous appellerons axe de la courbe, et nous entendrons par cordes supplémentaires les droites menées des extrémités de l'axe à un même point de la courbe.

Ceci convenu, en éliminant c entre les deux équations précédentes, on obtient successivement

$$A=\frac{e(1-d^2)-2d}{(1-d^2)+2d.e}(1)=\frac{e-\frac{2d}{1-d^2}}{1+\frac{2d}{1-d^2}.e}$$

$$=\frac{\text{tang.}\,b-\text{tang.}\,2a}{1+\text{tang.}\,2a\,\text{tang.}\,b}=\text{tang}\,(b-2a)=A.$$

A étant la tangente trigonométrique du supplément φ de l'angle que l'asymptote de la courbe fait avec son axe. Or, d'après la remarque qui termine le premier article, le point d'intersection primitive est à la courbe; donc la relation précédente appartient à tous les points de la courbe, et donne pour un point

quelconque

$$b - 2a = \varphi, \quad \text{ou } b - 2a = \varphi - 200^{\circ}.$$

Si donc par le nœud N on mène Np qui fasse avec NS un angle pNS double de rNS $= a$, elle rencontrera en p la supplémentaire Sp de Nr, et fera avec elle un angle NpS $= \varphi$, et tous les points p ainsi construits se trouveront sur le segment NpqS capable de l'angle φ, et décrit sur l'axe NS.

Ce cercle étant construit à priori, ce qui précède donne le moyen de tracer par points la courbe qui nous occupe.

Ayant mené par le sommet une droite quelconque Sp, on partagera en deux également les angles pNS, pNS′ et les droites de bissection Nr, Nr' rencontreront Sp en deux points qui, d'après la relation précédente, appartiendront à la courbe.

Par suite de cette construction :

$$r'\text{NS}' + r'\text{N}p + r\text{N}p + r\text{NS} = 2\,\text{droits} = 2r'\text{N}p + 2r\text{N}p = 2r\text{N}r'.$$

Donc en appelant cordes conjuguées les droites Nr, Nr' menées du nœud aux points de la courbe qui sont en ligne droite avec le sommet, on en conclura que les cordes conjuguées se coupent à angles droits. Cette propriété de la présente courbe a été déduite par M. *Dandelin*, de la génération de la focale. Mais elle appartient aussi à une classe de courbes dont la focale n'est qu'un cas très-particulier. J'ai nommé ces lignes courbes paraboliques, par la même raison qui a porté ce géomètre à appeler focale parabolique la courbe de M. *Quetelet*.

Cette invariabilité de distance angulaire de deux cordes conjuguées, est commune à toutes les courbes engendrées par la rotation de deux droites, et l'on peut établir que cette distance est sans exception $\frac{1}{m}$ 2 droits, en désignant par le nombre entier m le rapport des vitesses angulaires des deux droites génératrices.

Par le point N menons DNC tangente au cercle NpqS, et remarquons que q étant le milieu de l'arc pqS, l'arc Npq =

arc Np + arc qS; donc les angles CNr et CrN sont égaux, et par suite $Cr = CN = Cr'$, puisque le triangle rNr' est rectangle en N. Ainsi, SC étant une droite quelconque, menée du sommet, si à partir du point C, où elle rencontre la ligne DN, on prend sur elle des distances Cr, Cr', égales à CN, les points r, r' seront à la courbe.

En conséquence du premier mode de génération

$$\frac{\sin.\, pNr}{\sin.\, pNr'} = \frac{\sin.\, SNr}{\sin.\, SNr'};$$

donc les quatre droites NS, Nr, Np, Nr' forment un faisceau harmonique, et par suite

$$Sr = \frac{SN.Sp}{SN + Np}, \quad Sr' = \frac{SN.Sp}{SN - Np},$$

à cause de l'égalité des angles rNS et rNp, $r'Np$ et $r'NS'$. Or, si l'on fait $NSp = \alpha$ et $NpS = \varphi'$, et que l'on substitue dans les relations précédentes les valeurs de SN, Np et Sp, qui sont respectivement

$$r,\ 2n,\ \frac{2n \sin.\, \alpha}{\sin.\, \varphi'},\ \frac{2n \sin.\, (\varphi' + \alpha)}{\sin.\, \varphi'},$$

elles deviendront

$$Sr = \frac{2n \sin.\, (\varphi' + \alpha)}{\sin.\, \varphi' + \sin.\, \alpha}, \quad Sr' = \frac{2n \sin.\, (\varphi' + \alpha)}{\sin.\, \varphi' - \sin.\, \alpha}.$$

Ces équations polaires plus simples que la relation (G), nous donnent un moyen facile d'étudier le cours de la courbe.

Et d'abord, l'angle α étant nul, les deux rayons vecteurs seront égaux à $2n$. Donc au point N se réunissent deux branches de la courbe.

Il résulte ensuite de ce que

$$\frac{\sin.\, (\varphi' + \alpha)}{\sin.\, \varphi' + \sin.\, \alpha},$$

est toujours une fraction pour $\alpha < 2$ droits $-\varphi'$, que les points r se rapprochent de S, à mesure que α augmente, tandis que les points r' s'en éloignent évidemment avec rapidité; et que lorsque $\alpha = \varphi'$, le point r' correspondant est à l'infini, son conjugué étant le pied de la perpendiculaire abaissée de N sur la dernière direction des rayons vecteurs. Ainsi la courbe a une branche infinie au-dessous de l'axe.

α augmentant toujours, la direction des nouveaux rayons vecteurs ne rencontre plus DN au-dessous, mais bien au-dessus de NS. Les valeurs de r' seront donc comptées sur ce dernier prolongement : ce qu'indique d'ailleurs leur signe négatif dont on peut faire abstraction.

Si dans cette nouvelle direction, on observe un point r', correspondant à une valeur de α, plus grande que φ, mais pourtant peu différente de φ, on verra qu'il est situé à une distance infiniment grande de S, et par conséquent la courbe a aussi une branche infinie au-dessus de NS; les valeurs de α augmentant toujours, on conçoit que les points r' se rapprochent rapidement de S. Les points r s'en rapprochent incessamment aussi, mais sont toujours comptés au-dessous du point S.

Lorsque α a atteint la valeur $200^\circ - \varphi'$,

$$\frac{\sin.(\varphi' + \alpha)}{\sin.\varphi' + \sin.\alpha},$$

se réduit à o, et

$$\frac{\sin.(\varphi' + \alpha)}{\sin.\varphi' - \sin.\alpha}$$

prend la forme $\frac{0}{0}$. Mais on reconnaîtra par des transformations convenables, que sa valeur est dans ce cas $-$tang. φ'; ainsi les valeurs de Sr, Sr' sont respectivement o et $-2n$ tang. φ'. Or, la direction des rayons vecteurs coïncide évidemment avec la tangente en S au cercle (O). Donc le point r se confond avec le point de contact de cette tangente, et le point r' la rencontre en A, à son intersection avec la perpendiculaire NA élevée du nœud sur l'axe NS.

α croissant toujours, sin. $(\varphi' + \alpha)$ devient négatif et augmente; sin. α au contraire diminue; donc, 1° les points r, r' se trouveront tous deux désormais au-dessus de l'axe; 2° le premier s'écartera de S et le second s'en rapprochera. Enfin lorsque $\alpha = 200°$, la direction Srr' se confond comme pour $\alpha = o$ avec l'axe, et les deux points r, r' coïncident comme primitivement avec le nœud N. Il résulte de cette analise, que la courbe est tangente en S à la droite SA, tangente elle-même en ce point au cercle (O); que de ce point, extrémité de l'axe, partent deux branches finies qui s'étendent de part et d'autre de cet axe, et se réunissent à son autre extrémité aux deux branches infinies, et que leur ensemble forme ainsi un nœud au point N. On peut s'assurer encore que chaque branche infinie est le prolongement de la branche finie, décrite dans la portion du plan opposée par rapport à l'axe à celle où s'étend cette branche infinie. Car lorsque α a dépassé 200°, sin. α est négatif, et les équations polaires s'échangent l'une dans l'autre. Ainsi la courbe a en son nœud deux tangentes distinctes, et de plus ces tangentes sont rectangulaires.

En effet, la distance r, r' est constamment double de CN; elle diminuera donc à mesure que le point C se rapprochera du point N; dans la même hypothèse, les cordes conjuguées Nr, Nr' tendront de plus à se confondre avec la courbe, mais ne cesseront pas d'être rectangulaires; et lorsque les points r, r' seront infiniment près de N, ces cordes toujours rectangulaires seront devenues des élémens de la courbe déterminant la direction des tangentes en ce point.

Au reste, ce résultat, ainsi que la rectangularité des cordes conjuguées, se déduit immédiatement de l'équation (1), mise sous la forme

$$\alpha^2 - \frac{2(1 + Ae)}{A - e} - 1 = o,$$

car si l'on se rappelle que d représente les tangentes trigonométriques des inclinaisons de ces cordes sur l'axe, on en

déduit, en appelant d', d'', ses racines, $d'd''=-1$; donc les cordes conjugées se coupent à angles droits, quelle que soit l'inclinaison b de leur supplémentaire.

Or, la construction des tangentes au nœud est aisée, si l'on observe que, pour les points de la courbe en N, la corde Sp se confondant avec SN, la direction de Np coïncide avec celle de la tangente NC.

Si donc on voulait construire par le premier mode de génération les points de la courbe en N, il suffirait de mener Nl, Nl' aux extrémités du diamètre ll' perdendiculaire à SN. Ces droites seraient évidemment les tangentes demandées.

Par le point S', pris sur le prolongement de SN, et pour lequel S'N = SN, menons AT parallèle à DNC. Quelqu'inclinée que soit SrCr', les points r, r', se trouveront sur des parallèles à NC, placées symétriquement de part et d'autre de cette droite; or, à mesure que l'angle CSE diminue, la parallèle qui contient r, se rapproche de SE, donc il en est de même de celle qui renferme r', par rapport à AT, symétrique de SE, et lorsque cet angle est nul, la première se confond avec SE, et la seconde avec AT, qui contient par conséquent le point r'. Or, ce point est alors à l'extrémité de la branche infinie correspondante. Donc les deux branches infinies de la courbe, ont pour asymptote commune la droite AT, et la construction précédente donne le moyen de la déterminer. Ici se vérifie ce que nous avions avancé, d'après un résultat de nos calculs, savoir : que l'inclinaison de l'asymptote sur l'axe, était égale au supplément de l'angle φ, ayant pour tangente trigonométrique la quantité A.

Par suite de cette construction et de ce qui précède, l'asymptote est rencontrée en A par la courbe. Il en résulte encore que, comme CS = CK et Cr = Cr', rS est pour toute position de SC égale à r'K; ce qui montre qu'une partie de la courbe est comprise dans l'angle SAS', et l'autre dans son opposé au sommet.

L'égalité constante des longueurs Cr, Cr', CN a été reconnue par M. *Quetelet*, comme appartenant à la focale; mais elle

résulte aussi de la génération des courbes paraboliques. Toutefois comme la position actuelle du point N, est celle pour laquelle toutes ces courbes se transforment en cette ligne, nous pouvons en conclure que celle dont nous venons d'analiser le cours, est réellement la focale parabolique. M. *Dandelin* a donné de ses propriétés principales, une élégante exposition dans un beau mémoire, auquel je renvoie d'autant plus volontiers que j'ai la conviction qu'il procurera à tous ses lecteurs les jouissances que j'ai éprouvées à l'étudier. (*Mém. Acad. Brux.*, tom. 2, 1822.)

On peut donc rapporter tout ce qui précède à la focale.

Tirons par le point C, les droites $Cq'm$, Cq'' perpendiculaires à rN, $r'N$, qu'elles coupent évidemment en deux parties égales. Elles détermineront en C un angle droit, dont les côtés toucheront constamment la parabole qui aurait pour directrice DNC et pour foyer le sommet S. Or, on sait qu'une tangente Cm, étant menée à la parabole d'un point quelconque C de la directrice, on aura le point de tangence m en menant par le foyer S, la droite Sm, perpendiculaire à SC. Si de plus on joint le point r au point m, rm sera la normale de la focale en r. Tel est l'un des nombreux résultats de M. *Dandelin*.

Je terminerai par la démonstration bien simple du principe d'où nous sommes partis.

Puisque les angles CNr, CrN sont égaux, leurs supplémens DNr, NrS le sont aussi. On a donc :

$$NrS = \varphi + a, \text{ d'où } \varphi + 2a = b, \text{ ou } \varphi = (b - 2a)$$

et par conséquent,

$$\text{tang. } (b - 2a) = \text{tang. } \varphi.$$

Donc dans la focale, la tangente de la différence entre l'angle de la corde au sommet moins deux fois celui de sa supplémentaire, est une quantité constante. Cette quantité constante est la tangente trigonométrique de l'inclinaison de l'asymptote, ou celle du supplément de cette inclinaison, suivant que les points que l'on considère, sont d'un côté de l'axe ou de l'autre.

Suite du mémoire de M. Olivier, professeur à l'École centrale des Arts, à Paris. (*Voyez* le numéro précédent.)

Les théorèmes sur les aires et les volumes que je viens de démontrer pour quelques surfaces particulières et quelques corps particuliers, sont vrais pour toutes les surfaces et tous les corps; et en effet:

Soit une surface S dont l'équation est $\varphi(x, y, z, P, P', P'', \text{etc.}, P^n.)$

P, P', P'', etc., P^n étant ses paramètres et au nombre de *n*; par un point *o* arbitrairement choisi par rapport à la surface S, je mène les divers rayons vecteurs R, R', R'', etc., de cette surface, ensuite sur chacun d'eux et à partir du point *o*, je prends des longueurs *r* sur R, *r'* sur R', etc., telles que l'on ait la relation :

$$\frac{R}{r} = \frac{R'}{r'} = \text{etc.}, = \frac{U}{u}.$$

Les droites *r*, *r'*, *r''*, etc., seront alors les rayons vecteurs d'une surface *s*, qui sera semblable à la surface S, et dont l'équation sera $\varphi(x, y, z, p, p', p'', \text{etc.}, p^n)$, p, $p'p''$, etc., p^n étant ses paramètres, au nombre de *n*, et tels que l'on aura entre eux et ceux de la surface S, la relation :

$$\frac{P}{p} = \frac{P'}{p'} = \text{etc.}, = \frac{U}{u}.$$

Les rayons vecteurs R et *r*, R' et *r'* etc., sont dits rayons vecteurs homologues, de même que P et *p*, P' et *p'*, etc., sont dits paramètres homologues, des deux surfaces semblables S et *s*.

Les deux surfaces semblables S et s, jouissent des propriétés suivantes :

1° Si par le point o, l'on mène une droite arbitraire D, coupant la surface S au point M, et la surface s au point m, les deux plans tangens menés, le premier à la surface S au point M, et le second à la surface s au point m, sont parallèles ;

2° Si par le point o, l'on mène une seconde droite D', coupant la surface S au point M', et la surface s au point m', la corde MM' de la surface S, sera parallèle à la corde mm' de la surface s ;

3° Désignant par X, la longueur de la corde MM', et par x, celle de la corde mm', l'on a :

$$\frac{X}{x}=\frac{U}{u}.$$

Les cordes telles que X et x, sont dites cordes homologues des deux surfaces semblables. Cela posé :

Si la surface S est finie, et par conséquent enveloppe un espace fini ; désignant par A et a les aires respectives, et par V et v les volumes respectifs des surfaces S et s, l'on a toujours :

$$A : a :: X^2 : x^2 \text{ et } V : v :: X^3 : x^3.$$

Démonstration. Si par le point o, je mène une série de droites D, D', D'', etc., coupant la surface S aux points M, M', M'', etc., et la surface s aux points m, m', m'', etc. ; si je construis les plans tangens à la surface S, aux divers points M, M', M'', etc., ils détermineront un polyèdre T circonscrit à cette surface. Si de même je construis les plans tangens à la surface s, aux divers points m, m', m'', etc., ils détermineront un polyèdre t circonscrit à cette surface.

Les deux polyèdres T et t, seront semblables, puisque leurs faces seront en même nombre et parallèles entre elles, et que

les sommets homologues seront sur des droites concourant toutes au point o, et ils auront pour cordes homologues, les deux cordes MM′ et mm'.

Par conséquent l'on aura : aire T : aire t : : $X^2 : x^2$ et volume T : volume t : : $X^3 : x^3$. Mais plus l'on multipliera le nombre des faces des polyèdres T et t, plus leurs aires et leurs volumes se rapprocheront des aires et des volumes des deux surfaces S et s.

L'on doit donc en conclure que les aires des surfaces S et s, sont entre elles comme les carrés de leurs cordes homologues, et que leurs volumes sont entre eux comme les cubes des mêmes cordes.

Si l'on trace sur la surface S, b courbes arbitraires φ, φ', φ'', etc., φb, déterminant par leurs intersections un polygone P, si l'on regarde ce polygone comme la base d'un cône, ayant le point o pour sommet, ce cône coupera la surface s, suivant un polygone p, semblable au polygone P.

Et si par une corde X du polygone P et le point o, l'on fait passer un plan, il coupera le polygone p, en des points qui détermineront une corde x qui sera l'homologue de X.

L'on aura encore, aire P : aire p : : $X^2 : x^2$.

Si l'on a N surfaces S, S′, S″, etc., se coupant entre elles et déterminant dès-lors un corps polyèdrique T, dont je désigne la surface par Y et le volume par Z :

Si par rapport à un point arbitraire o, regardé comme *pôle commun*, l'on construit N surfaces s, s', s'', etc., respectivement semblables aux surfaces données, et telles que tous les rayons vecteurs homologues soient dans le même rapport $\frac{U}{u}$, pour chaque couple de surfaces semblables; dès-lors, les surfaces s, s', s'', etc., se couperont entre elles et détermineront un corps polyèdrique t, semblable au corps T.

Désignant par y la surface et par z le volume de t, par X et x, deux cordes homologues de T et t, l'on aura encore :

$$Y : y :: X^2 : x^2 \text{ et } Z : z :: X^3 : x^3.$$

Si l'on construit par rapport au même *pôle commun* o, de nouvelles surfaces s_1, s'_1, s''_1, etc., respectivement semblables aux surfaces S, S', S'', etc. Mais telles que les rayons vecteurs homologues soient dans un rapport $\frac{U'}{u'}$ autre que $\frac{U}{u}$, ces diverses surfaces se couperont entre elles, et détermineront un nouveau corps polyèdrique t', semblable à t et T.

Désignant par y' la surface et par z' le volume de t', par X et x', deux cordes homologues de T et t', l'on aura :

$$Y : y' :: X^2 : x'^2 \text{ et } Z : z' :: X^3 : x'^3,$$

construisant de la même manière les polyèdres t'', t''', etc.; l'on aura :

$$Y : y : y' : y'' : \text{etc.} :: X^2 : x^2 : x'^2 : x''^2 : \text{etc.}$$

et

$$Z : z : z' : z'' : \text{etc.} :: X^3 : x^3 : x'^3 : x''^3 : \text{etc.}$$

D'où l'on tire :

$$\sqrt{Y} : \sqrt{y} + \sqrt{y'} + \sqrt{y''} + \text{etc.} :: X : x + x' + x'' + \text{etc.}$$

et

$$\sqrt[3]{Z} : \sqrt[3]{z} + \sqrt[3]{z'} + \sqrt[3]{z''} + \text{etc.} :: X : x + x' + x'' + \text{etc.}$$

Si donc $X = x + x' + x'' + \text{etc.}$; l'on aura :

$$Y = [\sqrt{y} + \sqrt{y'} + \sqrt{y''} + \text{etc.}]^2$$

et

$$Z = [\sqrt[3]{z} + \sqrt[3]{z'} + \sqrt[3]{z''} + \text{etc.}]^3$$

L'on peut donc énoncer les théorèmes suivans :

1° Étant donné un corps polyèdrique T, déterminé par l'intersection d'un certain nombre de surfaces, si l'on mène une droite arbitraire et que l'on partage sa partie X interceptée

par la surface du corps T, en b parties arbitraires x, x', x'', etc., x^b. Puis, que sur chacune de ces parties comme corde homologue de X, l'on construise un corps polyèdrique semblable à T, l'on aura :

1° La surface du corps T est égale au carré de la somme des racines carrées de la surface de chacun des petits corps polyèdriques semblables.

2° Le volume du corps T est égal au cube de la somme des racines cubiques des volumes de chacun des petits corps polyèdriques semblables.

2° Si l'on trace sur une surface S, un polygone arbitraire P; si l'on mène une droite arbitraire et qu'on partage sa partie X interceptée par le contour du polygone en b parties arbitraires x, x', x'', etc., x^b; puis, que sur chacune de ces parties comme corde homologue de X, l'on construise un polygone semblable au polygone P; l'on aura :

L'aire du polygone P, est égale au carré de la somme des racines carrées de l'aire de chacun des petits polygones semblables.

EXEMPLES.

Premier exemple. Étant donnée une sphère du rayon R, si l'on partage une corde X de cette sphère en b parties arbitraires x, x', x'', etc., x^b. Puis, que sur x comme corde, l'on construise une sphère du rayon $r = \frac{R}{X} x$; sur x' une sphère du rayon $r' = \frac{R}{X} x'$; sur x'' une sphère du rayon $r'' = \frac{R}{X} x''$; l'on aura :

1° La surface de la sphère R, égale au carré de la somme des racines carrées des b surfaces sphériques construites sur x, x', x'', etc., x^b.

2° Le volume de la sphère R, égal au cube de la somme des racines cubiques des volumes des b sphères construites sur x, x', x'', etc., x^b.

Deuxième exemple. Étant données deux sphères concentri-

ques, la première du rayon A, la seconde du rayon B, si l'on suppose un cône du second degré, ayant son sommet au centre commun, il coupera la première surface sphérique suivant une courbe fermée F, et la seconde surface sphérique suivant une courbe fermée f.

Les deux courbes F et f seront semblables.

Je désigne par P le tronc sphéro-conique, intercepté par les deux sphères.

Si ensuite l'on suppose deux séries, chacune de n sphères concentriques aux premières, et ayant pour rayon, la première série a, a', a'', etc., a^n; la seconde série, b, b', b'', etc., b^n; désignant par p le tronc sphéro-conique intercepté par les deux sphères a et b; par p', celui intercepté par les deux sphères a' et b'; etc., etc., et par p^n, celui intercepté par les deux sphères a^n et b^n; l'on aura : si $A = a + a' + a''$ + etc., $+ a^n$, et si en même temps $B = b + b' + b''$ + etc., $+ b^n$:

1° La surface de P, égale au carré de la somme des racines carrées de chacune des surfaces p, p', p'', etc., p^n.

2° Le volume de P, égal au cube de la somme des racines cubiques de chacun des volumes p, p', p'', etc., p^n.

Sur une propriété des foyers dans les sections coniques, par M. Th. Olivier, professeur à l'école centrale des arts et métiers à Paris.

M. *Chasles*, dans son excellent mémoire de géométrie pure sur les lignes et surfaces du second degré, publié dans le tome V des actes de l'Académie royale des sciences de Bruxelles, démontre, à la page 33e, ce théorème remarquable.

« Tout plan mené par un foyer d'une surface de révolution,
» la coupe suivant une conique qui a pour foyer celui de la
» surface, et pour directrice l'intersection du plan directeur
» de la surface par le plan de la courbe. »

Il n'a pas donné le lieu géométrique du second foyer de la section, sans doute parce que cette recherche n'entrait pas dans le cadre de son travail.

En y réfléchissant un peu, on trouve que ce lieu géométrique est une surface du second degré, ayant pour sommets les foyers de la surface donnée et qu'elle lui est semblable.

Ce résultat se déduit sur-le-champ du théorème suivant :

Si l'on a deux surfaces du second degré semblables et concentriques, et si l'on mène une sécante arbitraire, ses parties interceptées entre les deux surfaces sont égales.

Le théorème sur lequel est fondée la construction d'une hyperbole, dont on connaît un point et les asymptotes, n'est qu'un cas particulier de ce théorème général.

Paris, le 15 octobre 1829.

— Nous avons reçu, le 20 juin dernier, une lettre de M. *Hachette*, dans laquelle ce savant parlait d'un résultat semblable à celui de M. *Olivier*, et qui lui avait été communiqué par M. *Binet*, inspecteur des études à l'école polytechnique. Dans la même lettre se trouvait encore la remarque suivante, qui intéressera peut-être nos lecteurs : « Je m'occupe en ce moment d'une notice historique sur les machines à vapeur ; à cette occasion, j'ai revu dans mes anciennes notes que la courbe dont on se sert pour faire mouvoir une tige de piston en ligne droite peut se définir : *la ligne engendrée par un point donné d'une ligne droite, dont une partie de longueur constante se meut entre deux circonférences données.* Cette génération est analogue à celle des sections coniques ; pour ces courbes, la droite de longueur constante se meut sur deux droites. »

Sur les proportions des lettres dans les différens alphabets.

Nous avons déjà eu occasion de parler des rapports qui existent entre les répétitions des différentes lettres dans les langues le plus généralement en usage, rapports qu'il peut être utile de connaître, surtout pour le fondeur. Voici quelques

résultats nouveaux, appuyés sur un plus grand nombre de recherches. Sur mille lettres, on trouve généralement :

	a	*e*	*i*	*o*	*u*	*y*
En Français. . .	73	186	67	52	65	1
Latin. . . .	88	122	103	49	83	2
Italien . . .	106	127	111	98	31	0
Espagnol. . .	123	141	60	100	44	13
Portugais . .	132	134	67	110	43	0,4
Grec	110	138	97	124	47	0
Anglais . . .	73	132	74	75	25	18
Hollandais . .	61	207	61	57	15	0
Allemand . .	55	170	81	22	41	0,6

La lettre *e*, comme l'on voit, est celle qui se présente le plus fréquemment dans les différentes langues, et en général les quatre voyelles *a*, *e*, *i*, *o*, se présentent plus fréquemment qu'aucune des consonnes. Parmi ces dernières lettres, celles qu'on rencontre le plus, sont *n*, *s*, *t*, *r*. On trouve encore les résultats suivans pour (*a*), le rapport des voyelles aux consonnes; (*b*), le nombre de lettres dans lesquelles se trouve cent fois la voyelle *e*; (*c*), le rapport de ces deux nombres :

	(*a*)	(*b*)	(*c*)
En Français.	0,805	537	0,188
Latin.	0,815	820	0,121
Italien	0,902	783	0,127
Espagnol	0,941	710	0,140
Portugais	0,927	744	0,134
Grec.	1,070	724	0,138
Anglais	0,665	755	0,132
Hollandais	0,677	480	0,208
Allemand	0,591	589	0,169

Quant aux lettres accentuées, leurs rapports sont les suivans pour la langue française :

Sur 1000 *e*	on trouve	110 *é*,	16 *è*,	16 *ê*;
318 *a*			22 *à*,	3 *â*;
373 *i*	2 *ï*,	4 *fi*,	2 *ffi*,	3 *î*;
313 *o*				2 *ô*;
360 *u*			4 *ù*,	3 *û*;

On trouve aussi, pour 5243 lettres, 101 virgules, 27 points, 18 points d'interrogation, 8 deux-points, 14 points et virgules. Ces rapports s'accordent assez bien avec les *polices* dont on se sert dans les imprimeries. Tous ces nombres sont extraits du mémoire de M. *Ed. Hayez* (voyez le cahier précédent). L'auteur se plaint de la difficulté qu'il a éprouvée à rendre convenablement ses idées en latin; et nous le concevons sans peine, puisque l'art typographique dont il avait à parler, était entièrement inconnu aux latins. M. *Edm. Doncker-Curtius*, dans une circonstance semblable, a dû renoncer à traiter de la théorie des moulins à vent, que l'on connaissait à Rome tout aussi-bien que l'imprimerie. Ces nouveaux exemples feront sans doute mieux sentir combien il serait convenable de donner plus de latitude aux jeunes docteurs, pour exprimer clairement leurs idées. Les difficultés contre lesquelles ils ont à lutter, sont déjà assez nombreuses pour ne pas leur imposer encore l'obligation de parler dans la langue des Latins de l'art typographique, des moulins à vent, ou de tel autre art dont les Latins n'ont jamais eu connaissance.

Sur la production de bandes colorées par des miroirs plans.

Si l'on se place à quelques pas, devant un miroir plan étamé, et qu'on observe la lumière d'une bougie par réflexion, on voit,

à côté de l'image de cette lumière, se former plusieurs bandes colorées très-apparentes. Il faut tenir la bougie à quelques pouces devant l'œil, et de manière que les rayons incidens et les rayons réfléchis fassent ensemble un très-petit angle. Cette observation curieuse m'a été communiquée par M. *Whewell*, professeur à l'université de Cambridge. Mais en la répétant ensemble, nous nous sommes aperçus qu'elle ne se produisait pas constamment, et que la condition nécessaire pour qu'elle pût avoir lieu était la présence d'une légère couche de vapeur sur le verre. Pour répéter l'expérience, il suffit de faire passer légèrement l'haleine sur un miroir un peu froid, afin que la vapeur ne disparaisse pas trop rapidement.

J'ai reconnu depuis que l'expérience réussit également bien, lorsque le miroir n'est pas étamé; on peut même se borner à prendre un simple carreau de vitre, seulement les bandes colorées se prononcent moins bien à cause de l'irrégularité du verre. Il n'est pas non plus nécessaire de faire l'observation dans une chambre obscure; on peut la faire même en plein jour. Si l'on applique derrière le verre une goutte d'huile de térébenthine, par exemple, on voit disparaître les bandes colorées dans la partie correspondante.

L'expérience n'a pas lieu avec un miroir métallique ou sur un verre opaque; il faut nécessairement un corps diaphane terminé par des plans parallèles.

En général, quand la lumière se trouve avec l'œil dans un plan vertical, les bandes colorées sont horizontales; elles deviennent verticales si la lumière et l'œil sont dans un plan horizontal. Pour les autres positions, on prévoit facilement leur arrangement.

Ces bandes colorées affectent la forme de lignes courbes qui, pour certains cas, dégénèrent en droites. Elles ne se prolongent pas au delà d'une certaine distance de la lumière.

On distingue, en partant de l'image de la lumière, successivement du vert-bleuâtre, du jaune, du rouge; du vert-bleuâtre, du jaune, du rouge, etc.

Toutes choses égales, ces bandes sont plus larges à mesure :

1° qu'on s'éloigne davantage du miroir; 2° que la lumière se rapproche davantage de l'œil; 3° en un mot que l'angle des rayons incidens et réfléchis se trouve moindre; quand l'angle est nul, les bandes deviennent infinies.

Le phénomène dont nous venons de parler, ne semble pas se rapporter à celui que *Newton* a observé pour les miroirs concaves. Il paraît, quant aux couleurs, avoir plus de rapport avec ce qu'on observe quand on voit le soleil ou une lumière à travers une lame transparente, sur laquelle on a répandu une poudre très-fine. A. Q.

État de l'enseignement dans les Pays-Bas, en 1827 (1).

Le rapport sur l'état des écoles supérieures, moyennes et primaires, dont nous allons extraire les documens les plus intéressans, a été fait aux états-généraux le 18 mai de cette année, et vient d'être imprimé à Bruxelles, chez M. *Weissenbruch*. Il résulte de ce rapport que l'état de l'enseignement, pendant l'année 1827, sans offrir de particularités bien remarquables, a continué cependant à s'étendre et à se perfectionner. Les moyens de s'instruire se sont multipliés; de nouvelles écoles primaires et des colléges ont été ouverts; et un établissement d'un genre nouveau, le Musée des sciences et des lettres, a été établi à Bruxelles.

Les dépenses faites pour l'instruction primaire proviennent soit du trésor de l'état, soit des fonds provinciaux, soit des caisses communales; ces sommes ont été respectivement de 316 361,92 fl.; de 96 707, 25 fl., et de 1 006 501, 07 fl. Le tableau suivant indique les sommes partielles qui ont été fournies par les différentes provinces; nous y avons joint en même temps l'état de la population dans chacune de ces provinces.

---

(1) Voyez sur le même sujet le IIIe vol. de la *Correspondance* et les *Recherches statistiques sur le royaume des Pays-Bas*, in-8°, chez *Tarlier*, à Bruxelles, 1829.

PROVINCES.	POPULATION 31 DÉC. 1827.	FONDS PROVINCIAUX.	FONDS DES CAISSES COMMUNALES.
Brabant sept . . .	332 551	2 500 fl.	54 197 fl.
Brabant méridional .	499 728	10 000	90 681
Limbourg	328 234	3 500	33 331
Gueldre.	293 396	10 404	61 383
Liége	347 625	6 000	19 425
Flandre orientale. .	708 705	8 800	34 234
Flandre occidentale.	575 807	5 000	50 669
Hainaut.	567 300	4 000	60 762
Hollande septent. .	391 586	12 317	161 394
Hollande mérid . .	453 818	10 045	114 816
Zélande	133 932	1 391	35 268
Namur	194 845	7 875	55 206
Anvers	338 294	2 000	36 761
Utrecht.	122 213	11 800	36 197
Frise	200 332	200	55 826
Overyssel	165 936	875	26 291
Groningue . . .	153 982	»	14 727
Drenthe	59 915	»	10 155
Luxembourg. . . .	298 655	»	55 178
TOTAL. . . .	6 166 854	96 707	1 006 501

Nous regrettons que le Rapport ne nous permette pas de faire connaître le nombre des écoles et des élèves pour l'enseignement primaire et l'enseignement moyen. Comme du reste ces nombres ont peu varié dans l'espace d'un an, on pourra recourir au *rapport* de 1826, ou à l'extrait que nous en avons donné dans les *Recherches statistiques du royaume*, etc.

Quant aux élèves qui se trouvaient dans les universités au 1er novembre 1827, et qui étaient inscrits sur les listes des différentes facultés, en voici le tableau.

UNIVERSITÉS.	THÉOLOGIE.	DROIT.	MÉDECINE.	SCIENCES.	PHILOSOPHIE ET LETTRES.	TOTAL.
Leyde	158	191	62	10	167	588(1)
Utrecht . . .	169	95	21	45	168	498*
Groningue . .	92	68	29	14	84	287
Louvain . . .	»	158	70	83	373	678(2)
Liége	»	185	89	78	154	506
Gand	»	207	165	11	21	404(3)

Il se trouve que le nombre de ces élèves qui était de 2774, en 1826, a augmenté de 187.

Sur l'ancienneté des écoles du dimanche dans les Pays-Bas.

On lit dans la 8e livraison de l'annuaire (*Jahrbucher der straf- und besserungs-anstalten*, etc.), que publie, à Berlin, le docteur *Julius*, quelques recherches sur l'ancienneté des écoles du dimanche dans les Pays-Bas, que nos lecteurs verront sans doute avec plaisir. « Les Pays-Bas, à qui l'Europe nouvelle doit tant pour tout ce qui se rapporte à son amélioration, dit ce philanthrope éclairé, paraissent encore ici avoir frayé le chemin à suivre. » On trouve en effet dans un arrêté du synode de Cambrai de l'année 1567 (tit. V, chap. I.) : «Sub ipsa autem vespera» rum hora scholis præsint dominicalibus ipsi (parochi) aut eo» rum substituti », et dans le synode provincial tenu trois ans après (1570) à Malines, il est dit (tit. *de schola dominicali*): « Quum non omnes scholas quotidianas frequentare possint, » sed multi per hebdomadam artificiis aut aliis domesticis oc» cupationibus distinentur, quorum tamen parentes ad instituen-

(1) Dans le nombre des élèves en médecine sont compris 22 jeunes gens qui suivent en même temps les cours de cette faculté et les cours préparatoires.

(2) Dans ce nombre sont compris 269 élèves du collége philosophique.

(3) Dans le nombre des élèves en droit et en médecine sont compris ceux qui se préparent pour ces études.

» das proles suas sæpe inidonei sunt; ideo ad satisfaciendum » decreto concilii tridentini curent episcopi præter quotidianas » scholas etiam dominicales in omni parochia institui; in quibus » una aut altera hora, diebus dominicis et festivis, lingua verna- » cula bene et distincte omnes prima principia religionis edo- » ceantur, addita per pastorem aut sacellum facili, et qualem illa » ætas admittit, explicatione ad gustum intelligentiæ, etc. » (Chap. II.) Et si hæ scholæ non proprie instituantur ad li- » teras discendas aut artem scribendi et legendi, poterit ni- » hilominus juventus in illis doceri, postquam in pædictis ut- » cunque instituta fuerit. » On va même jusqu'à requérir l'intervention des autorités (Chap. VI.) « Ut autem scholæ istæ » non frustra institutæ videantur, sed cum fructu frequenten- » tur, ineunda erit magistratibus loci cujusque ratio, a paren- » tibus obtinendi, ut juventus has scholas diligenter frequen- » tet;... idque sub certa mulcta a parentibus, si monitas proles » suas ad scholam venire non curent, exigenda. »

— —

Tableaux statistiques pour Bruxelles (1828).

La IVe livraison de ce volume de la *Correspondance* contient plusieurs tableaux statisques pour Bruxelles et pour les neuf années qui ont précédé 1828. Nous devons à l'obligeance de M. *Cuylen*, secrétaire de la régence de la ville, de pouvoir compléter aujourd'hui ces documens pour la période décennale.

Vins	hectol.	8678
Vinaigre de vin . .	»	364
Esprits	»	651
Eau-de-vie et liqueurs	»	605
Genièvre	»	8112
Bières	»	273205
Vinaigre de bière .	»	4056
Bœufs	têtes.	3453

Vaches et taureaux.	têtes.	5737
Veaux	»	17172
Moutons et agneaux.	»	26933
Porcs	»	3062
Cochons de lait. .	»	57
Viande à la main. .	kil.	266855
Jambons	pièces.	6504
Poisson de mer . .	florins.	243046
Morue . . .	tonnes.	1105
Stockvisch. . . .	kilog.	73279
Huiles à manger . .	hectol.	785

Foin . . . .(1)	tonneaux.	9624
Paille.	»	7054
Avoine	hectol.	76627
Bois à brûler	stères.	29026
Fagots, racines, etc. . . .	»	18556
Charbon de bois	hectol.	65491
Houille	tonneaux.	56979
Chaux et plâtre.	hectol.	97160
Briques et briquettes. . . .	1000.	44582
Pierres bleues el blanches . .	tonneaux.	7849
Autres pierres	»	104
Bois de construction	»	25905

BESTIAUX VENDUS.	NOMBRE.	VALEURS MOY.
Bœufs	3453	125 fl.
Vaches, 1re qualité	637	100
— et génisses, 2e et 3e qual.	5100	70
Veaux, 1re qualité	7172	32
— 2e et 3e qualité. . . .	10000	15
Moutons, 1re qualité	5933	11
— 2e et 3e qualité . . .	21000	7

(1) Le tonneau mentionné dans ce tableau se compose de 1000 kilog.

Quant aux secours administrés aux individus noyés en rivière dans le ressort de Bruxelles, on en a compté, en 1828, 19 secourus utilement et 10 non susceptibles de secours. Parmi ces individus, 5 ont été retirés de l'eau hors de Bruxelles; et 24 dans l'enceinte de la ville. On peut encore classer ces individus de la manière suivante, quant au sexe et aux causes qui ont amené la submersion.

Individus noyés, hommes. . . . , .	22
— — femmes	7
En se baignant	2
Accidentellement.	20
Volontairement	2
Sans causes connues.	5

Gronden der toegepaste Werktuigkunst. Principes de la mécanique appliquée par *G.-J. Verdam,* 1re, partie, 1re, 2e et 3e section, in-8°; à Groningue, chez *Van Boekeren*, 1829.

M. *Verdam*, directeur de l'école d'enseignement moyen à La Haye, a publié l'année dernière, sous forme d'introduction à la mécanique appliquée, les premiers principes des mathématiques que les industriels ne peuvent se dispenser de connaître. (*Voyez* page 199 de ce volume.) Cette première publication a été suivie successivement de trois *sections*, formant ensemble la 1re partie d'un traité complet de *mécanique appliquée.* Sans entreprendre de présenter ici une analise complète de ces ouvrages, nous allons essayer de donner une idée de leur contenu et du plan qu'à suivi l'auteur.

Les deux premières sections contiennent le résumé des propositions théoriques qui sont absolument nécessaires dans les applications; ainsi l'auteur, s'occupant d'abord de la théorie de l'équilibre, traite de la composition et décomposition des forces, et des centres de gravité; il passe de là à la considération des mouvemens de toute espèce, à celle des chocs et des

frottemens. — Appliquant ensuite les principes généraux aux différentes machines, il traite successivement de la théorie des leviers, des poulies, du tour, du plan incliné, de la vis, etc. On conçoit qu'il n'était guère possible de dire des choses neuves sur de pareils sujets ; mais il y avait du mérite à présenter les principes d'une manière claire, à bien choisir ses exemples, à ne pas se jeter dans de trop grandes abstractions, en s'adressant à des industriels, et à faire comprendre l'usage des formules par des exemples numériques pris avec discernement ; et, sous ces différens rapports, M. *Verdam* nous paraît avoir fait tout ce qu'on pouvait désirer de lui.

Dans la troisième section, l'auteur pose les principes d'après lesquels on détermine la résistance des corps selon leur nature, leur forme et leur position, et fait connaître les formules qu'on emploie dans de pareilles appréciations. Il fait connaître en même temps la ténacité de différens matériaux, d'après les résultats de l'expérience ; et, dans un dernier chapitre, il donne des applications de tout ce qui a précédé, à la construction la plus avantageuse des machines simples. M. *Verdam* prévient, dans son avant-propos, qu'il a puisé les données sur la résistance des matériaux et quelques autres renseignemens que contient son ouvrage, chez les savans les plus estimés, et particulièrement, dans les écrits de *Tredgold*, *Barlow*, *Banks*, etc. Toute cette section, qui est consacrée à la pratique, nous a paru traitée d'une manière fort satisfaisante, et fait désirer de voir paraître bientôt le reste de l'ouvrage (1). Il serait peut-être avantageux que l'auteur, en citant les données de l'expérience, eût soin d'indiquer chaque fois les sources auxquelles il a puisé, parce que de cette manière le lecteur se familiarise sans peine avec la connaissance des bons ouvrages, et peut, en cas de besoin, trouver avec plus de facilité de nouveaux détails sur l'ob-

---

(1) Au moment de mettre cet article sous presse, nous recevons la 1re section de la seconde partie ; nous en rendrons compte quand le volume entier aura paru.

jet de ses recherches. En nommant dans son avant-propos les auteurs auxquels il a emprunté, M. *Verdam* paie sa dette comme écrivain consciencieux ; mais nous pensons que cela ne suffit peut-être pas pour ses lecteurs. Cette observation, bien légère sans doute, ne peut nuire au mérite du travail de M. *Verdam*, qui contribuera, avec ceux de MM. *Dandelin*, *Lemaire*, *Pagani*, etc., à établir chez nous l'étude de la mécanique appliquée sur un bon pied, et à propager les principes dont doivent dépendre désormais les succès de notre industrie (1).

ACADÉMIE ROYALE DE BRUXELLES.

Séance du 3 octobre 1829. — Il est donné lecture d'un rapport de MM. *Kickx*, *d'Omalius* et *Cauchy*, sur un mémoire de M. *Sauveur* fils, contenant des recherches sur les végétaux fossiles des terrains houilliers de la Belgique. Les conclusions du rapport sont très-favorables à ce travail, qui paraîtra probablement dans les mémoires de l'Académie, par suite de la nomination de l'auteur. L'Académie reçoit un manuscrit de de M. *Glœsener*, professeur extraordinaire à l'université de Louvain, sur l'action réciproque du courant électrique des aiguilles d'acier et de fer aimantées et non aimantées. M. *Dumortier* présente un mémoire sur la carpologie, auquel il a joint un tableau d'une nouvelle classification des fruits. On reçoit encore plusieurs autres communications et l'hommage de différens ouvrages adressés par MM. *Moll*, *Dejonge*, *De Reiffenberg*, etc., ainsi que les mémoires de l'institut d'Amsterdam, de Turin, de Berlin, de Copenhague, de Londres, etc.

Séance du 7 novembre. — M. *Blume*, auteur de la *Flore de*

---

(1) Parmi les savans qui ont servi le plus utilement la mécanique industrielle, on citera toujours avec éloge notre compatriote M. *Christian*, qui professait anciennement à Bruxelles, et qui maintenant dirige le conservatoire des arts et métiers de Paris.

Java, qui avait été nommé précédemment, prend place parmi les membres. Il est donné lecture par le secrétaire de différentes lettres de MM. *Dumortier*, *De Reiffenberg*, *Pagani*, *Moreau de Jonnès*, etc. L'Académie reçoit aussi plusieurs ouvrages, et entre autres des recherches météorologiques par M. *Bouvard*, et un mémoire sur l'achromatisme produit au moyen de lentilles fluides par M. *Barlow*. M. *Quetelet* communique à l'Académie des expériences sur les bandes colorées, produites par des miroirs plans. (*Voyez* pag. 394.) M. *Marchal* lit un mémoire ayant pour objet de rectifier la date du diplôme de l'empereur *Otton-le-Grand*, qui confère le titre d'avoué à l'abbaye de Gembloux, à *Lambert*, comte de Louvain.

Correspondance et Annonces diverses.

— M. *Vander Maelen* vient de faire paraître la 7e livraison de l'*Atlas de l'Europe*. Ce travail immense doit comprendre 165 cartes sur grand colombier d'*Annonay*, avec un tableau général d'assemblage. Chaque livraison se compose de quatre cartes coloriées, et coûte aux souscripteurs 7 fl. 50. Les 28 cartes qui ont paru jusqu'à présent comprennent la Turquie d'Europe, la Grèce et une partie de la Russie et des états voisins. La gravure sur pierre se fait sous la direction de M. *J. Collon*. On peut dire que cet ouvrage est, dans son genre, un des plus parfaits que la lithographie ait produits, et un des monumens dont la publication fera le plus d'honneur au pays. M. *Vander Maelen*, qui se recommande à tant de titres à l'estime de ses compatriotes et de tous les amis des sciences, se propose, dit-on, de faire construire sous peu un vaste édifice où il réunira ses bureaux, ses collections scientifiques, ainsi que ses atelies de lithographie et d'imprimerie : sa riche bibliothéque et les nombreux journaux scientifiques qu'il reçoit des différentes parties du monde, seront mis à la disposion du

public dans une salle destinée à cet effet. On sait que depuis quelque temps, plusieurs personnes instruites donnent chez lui gratuitement des leçons sur différentes branches des sciences. Ces leçons seront continuées et contribueront à rendre l'institut géographique qu'il crée, l'un des établissemens les plus utiles de notre pays et qui se recommanderont le plus à l'attention des étrangers.

— Il a paru à Mannheim, en 1823, une brochure in-4° de 34 pages, intitulée *Dissertatio mathematica de curva focali regulari quam scripsit* Ed. Kûlp, *hasius*. Nous indiquons cet ouvrage, que nous ne possédons que depuis peu, aux personnes qui aimeraient de connaître tout ce qui se rapporte au sujet des mémoires que MM. *Van Rees* et *Le François* ont insérés dans ce numéro de la *Correspondance*. L'auteur du mémoire que nous annonçons s'est spécialement occupé des propriétés géométriques de la focale considérée dans le cylindre.

— Le gouvernement paraissait disposé il y a quelques années à ordonner le desséchement du lac de Harlem; ce sujet fut alors vivement débattu; il s'agissait de rendre à la culture plus de 20,000 bonniers actuellement sous les eaux; mais on a semblé depuis y avoir entièrement renoncé. M. *De Stappers* vient de mettre en vente, chez *De Greef-Laduron*, à Bruxelles, une brochure in-8°, ayant pour objet la formation d'une société pour le desséchement de ce même lac. « Le lac » de Harlem proprement dit, n'existe que depuis le XVIe siè» cle; avant cette époque, un grand marais connu dans le » pays, sous la dénomination d'*Harlemmermeer*, occupait à » peu près le centre du lac d'aujourd'hui.... Il est constaté que, » vers la fin du XVIe siècle, le village de Vijfhuizen et toutes » les terres qui séparaient la Spiringsmeer, la Harlemmermeer » l'Oudermeer et la Leidschemeer furent engloutis, de ma» nière que les quatre lacs ne formèrent depuis cette époque, » qu'une seule nappe d'eau qui porte aujourd'hui le nom de » lac de Harlem... Vers le commencement du XVIIe siècle, » nouveaux désastres, etc. » L'auteur estime que les digues coûtent annuellement 30,000 fl. On a fait différens projets de

desséchement à plusieurs époques. En 1640, avant l'accroissement du lac, l'ingénieur *Leeghwater* porta son devis à. fl. 3600000
En 1769, *Goudrian* et *Klinkenberg* à 9000000
En 1808, *Blanken janz* 8000000
En 1820, le baron *Van Lynden* 7000000
En 1829, M. *De Stappers*, pour dessécher non-seulement le lac et quelques marais voisins, mais pour construire encore des canaux de dérivation. 6000000

— Il nous est parvenu une réponse à la question suivante, proposée dans les *Annales* de M. *Gergonne* : *Y a-t-il dans une ellipse une corde mobile de grandeur constante qui, dans son mouvement, enveloppe un cercle ; et s'il existe une telle corde, quelle en est la longueur et quel est le rayon du cercle ?* L'auteur prétend que le problème ne comporte pas de solution, excepté pour le cas connu du cercle ; nous aurions désiré que son assertion eût été suffisamment motivée par ses raisonnemens. Au reste, nous recevons les *Annales* de Nîmes où l'impossibilité du problème se trouve également reconnue. Nous lisons dans le même numéro l'observation, exprimée un peu durement peut-être, qu'un problème proposé par M. *Noël*, notre correspondant, l'avait déjà été dans le Ier volume des *Annales*. De pareilles répétitions sont fâcheuses sans doute ; mais quel est le mathématicien qui peut se flatter de connaître tout ce qui a été dit ou écrit ? C'est en général là l'origine de toutes les querelles scientifiques ; et leur nombre prouve assez que malheureusement le manque de mémoire est plus commun qu'on ne pense. Nous remercions du reste M. *Gergonne* de son observation, sous quelque forme qu'il ait jugé convenable de la présenter.

QUESTION.

On demande une explication de la formation des bandes colorées par un miroir plan, dont il est parlé à la page 394 de ce numéro.

TABLE

DES MATIÈRES CONTENUES DANS CE VOLUME.

MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES.

Géométrie.

Des propriétés de la courbe d'intersection d'une sphère et d'un cône de révolution dont le sommet est en un point de la sphère; Chasles. 44
De la division en parties égales d'une droite donnée sur le terrain, en n'employant, pour cet effet, que des jalons et une fausse équerre; M. Noël. 215
Théorème sur le quadrilatère complet; M. Manderlier 218
Sur les courbes du 3e et du 4e degré; extraits de deux lettres de M. Chasles, avec une note du rédacteur. 231

Analise.

Sur les limites des racines des équations littérales du troisième degré; M. Van Rees. 30
Méthode pour reconnaître les nombres premiers; M. A.-S. De Montferrier 94
Trouver trois nombres dont la somme soit égale au produit; le même. 97
Sur l'élimination d'une inconnue entre deux équations; M. A. Meyer. 100
Note sur l'article de M. De Montferrier, inséré dans le numéro précédent; M. Verhulst. 175

Géométrie analitique.

Sur le lieu des points d'intersection de trois plans ou de trois axes rectangulaires assujettis à être tangens à trois sphères données; M. Steichen 32
Solution de la même question; M. Le François 34
Autre solution et développement de la même question; M. Reiss . . 35
Quelques remarques sur un problème résolu dans le volume précédent; M. Steichen 47
Réponse à une question énoncée à la page 348 du tome IV; le même. 49

Pages.
Mémoire sur les propriétés des hyperboles et des paraboles considérées comme le lieu des pôles d'un cercle mobile ; M. Olivier . . 51
Sur la surface touchée constamment par un plan assujetti à de certaines conditions ; M. Le François. 104
Solution d'un problème énoncé à la page 136; M. Steichen. . . 237
Sur la division des surfaces et des corps ; M. Olivier. 324
De la détermination du nombre de boulets qui entrent dans une pile dont la base a la forme d'un hexagone régulier; par différens auteurs 347
Mémoire sur les focales ; M. Van Rees 361
Suite du mémoire concernant la division des surfaces et des corps ; M. Th. Olivier. 386
Sur une propriété des foyers dans les sections coniques ; par le même. 391
Note du rédacteur. 392

MATHÉMATIQUES TRANSCENDANTES.

Géométrie Analitique.

Propriétés générales des sections coniques ; M. Chasles. 6
De quelques propriétés résultantes des cercles qui touchent les directions des côtés d'un triangle ; M. Noël. 22
Sur les transformations polaires; les propriétés générales des surfaces du second degré, etc. ; M. Chasles 85
Mémoires sur les propriétés des diamètres conjugés des hyperboloïdes ; le même 137
Sur les surfaces du second degré; le même. 173
Sur la transformation des relations métriques des figures; mémoire du même auteur 281

Analise.

Mémoire sur les fonctions semblables de plusieurs groupes d'un certain nombre de fonctions ou élémens ; M. Reiss 201

Mécanique Analitique.

Note sur le mouvement vibratoire d'une membrane élastique de forme circulaire ; M. Pagani 227
Sur les propriétés des centres des moyennes distances des points d'application de plusieurs forces ; M. Chasles. 106
Sur l'intégration de quelques équations différentielles, relatives au problème des oscillations du pendule ; M Verhulst. 379

MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES.

Astronomie.

Pages.
Description des Observatoires d'Angleterre; A. Q 58
Construction d'un nouvel observatoire à Genève. 266

Physique.

Des surfaces réfléchissantes ou dirimantes qui ont deux foyers conjugués; A. Q. 1
Sur les lignes dirimantes à deux foyers conjugués; A. Q. 109
Sur le même sujet; lettre de M. Chasles au rédacteur. 116
Des courbes d'intersection apparente de deux lignes qui tournent avec rapidité autour de deux points fixes; M. Le François. . . . 120
Mémoire relatif à l'explication des formations cristallines; M. le professeur Thilo, de Francfort 158
Sur les lignes aplanétiques; lettre de M. Chasles 188
Sur les lignes aplanétiques. — Sur les lignes colorées que produit la polarisation dans les plaques de cristal. — Sur les spiriques ou sections annulaires, et en général sur les lignes du troisième degré; lettre du rédacteur 190
Résumé d'une série d'expériences relatives à la durée de la sensation de la lumière; M. Plateau. 220
Lettre de M. Pagani au rédacteur, sur les formules de M. Gergonne, relatives au phénomène du mirage 222
Observations de l'aiguille magnétique à Bruxelles, par A. Quetelet. 224
Sur les couleurs et les spectres de différentes flammes; M. Herschel. 254
Nouvelles expériences sur le pendule, par MM. Bessel et Sabine. 255
Sur la construction d'une nouvelle lunette achromatique de 7.8 pouces d'ouverture, par M. Barlow 258
Sur la mesure des hauteurs des montagnes au moyen du pendule; M. Thilo 337
De la courbe produite par les intersections successives de deux droites pivotant autour de deux points fixes, de manière que la vitesse angulaire de l'une soit double de celle l'autre; M. Le François 379
Sur la production de bandes colorées par des miroirs plans . . . 394

Mécanique Industrielle.

Sur une nouvelle pompe à comprimer l'air; lettre de M. Hachette. 260
Sur les proportions des lettres dans les différens alphabets, M. Ed. Hayez 392
Gronden der toegepaste werktuigkunst 401

Météorologie.

Résumé des observations météorologiques faites à Maestricht en 1828; M. Crahay 65

Statistique.

Pag

Prix moyens du froment, du seigle, de l'orge et de l'avoine à Bruxelles, depuis 1500 jusqu'à nos jours; A. Q 7
Avertissement et observations sur les recherches statistiques insérées dans ce recueil 7:
Calcul approximatif de la population du royaume des Pays-Bas; A. Q. 12(
Du nombre des crimes et des délits dans les provinces du Brabant méridional, des deux Flandres, du Hainaut et d'Anvers, pendant les années 1826, 1827 et 1828; M. A. Quetelet 177
Marine du royaume des Pays-Bas. 238
Tableaux statistiques pour Bruxelles 261
Note sur le rapport des prix des grains; M. le conseiller Rau. . . . 354
État de l'enseignement dans les Pays-Bas, en 1827 396
Sur l'ancienneté des écoles du dimanche dans les Pays-Bas 398
Tableaux statistiques pour Bruxelles (1828) 399

Revue Scientifique.

Notice historique sur le commandeur de Nieuport 242
Almanak ten dienste der zeelieden. — Compendio de matematicas puras y mistas 273
Académie royale de Bruxelles 403
Correspondance et annonces scientifiques 82
Correspondance et annonces scientifiques. 135
Correspondance et annonces scientifiques. 197
CORRESPONDANCE ET NOUVELLES SCIENTIFIQUES. — Académie de Bruxelles. — Musée des sciences. — Dissertation sur la lumière, par M. Plateau. — Sociétés d'assurances en Angleterre. — La *Récompense*. — Sur la courbe que décrit le chien qui court après son maître. — Astronomie populaire. — Prix des grains vers 1400. — Mort du docteur Young. 275
CORRESPONDANCE ET NOUVELLES SCIENTIFIQUES. — Exposé de la situation du Hainaut en 1828. — L'empire russe comparé aux principaux états du monde; par M. A. Balbi.—Dissertation sur les séries, par M. Valérius. — Dissertation sur le proportionnement des lettres dans les différentes langues; par M. Ed. Hayez. — Mémoires de la société astronomique de Londres et de l'observatoire de Cambridge. — Projet d'organisation d'une société météorologique, par M. Morin . 356
CORRESPONDANCE ET ANNONCES DIVERSES. — Atlas de l'Europe, par *Vander Maelen*.—*Dissertatio mathematica de curva focali*; par M. Külp.—Sur le desséchement du lac de Harlem, par M. *De Stappers*. — Sur un problème proposé dans les *Annales mathématiques* . . 404
Questions 84, 136, 200, 280, 360, 406
Table des matières 407

Planche V, tome V.

